Voltando à determinação da probabilidade de uma dada sequência de *erros em mensagens* (63), vamos partir da sequência de valores

$$e_{N+1}, e_{N+2}, e_{N+3}, \ldots, e_{N+\omega} \qquad (69)$$

e verificar se é possível gerar uma nova sequência de valores

$$h_{N+1}, h_{N+2}, h_{N+3}, \ldots, h_{N+\omega} \qquad (70)$$

através da correspondência φ. Como existem sequências (69) para as quais não existe nenhuma sequência (70) que lhe corresponda iremos designar por D_h o domínio de todas as sequências (70) que têm correspondência no domínio D. As sequências de valores (69) que existem em D mas não têm correspondência em D_h, são impossíveis no modelo aqui descrito e corresponde-lhes, por esta razão, uma probabilidade nula.

Finalmente, é possível escrever

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{\eta}(G_{K+j}=g_{K+j})\right\}=$$

$$=\sum_{D_h} P\left\{(N_{L+1}=h_{L+1})\right\}\cdot$$

$$\prod_{i=2}^{\omega} P\left\{(N_{L+i}=h_{L+i}) \mid N_{L+i-1}=h_{L+i-1})\right\} \qquad (71)$$

O facto de estarmos a considerar a sequência de estados de ruído como uma cadeia de Markov estacionária, e estados com probabilidade invariante, permite falar em P_0, valor constante da probabilidade do canal se encontrar no estado $(W=0)$, qualquer que seja o instante considerado. O valor de P_0 indica-nos a percentagem do tempo ocupado pelo estado de ruído $(W=0)$ e é um dos dados do nosso problema.

Acrescentaremos, neste ponto, as relações que nos permitem calcular as probabilidades de transição a partir de P_0

$$\begin{cases} P_{00}=\dfrac{4.P_0-1}{3} \\ P_{01}=1-P_{00} \end{cases} \qquad (72)$$

2.3 Estratégia da codificação

Admitiremos que cada mensagem produzida pela fonte é constituída por 26 símbolos binários, donde se conclui que o alfabeto fonte tem $\alpha=2^{26}$ símbolos.

Cada uma destas mensagens é codificada segundo um código corrector de erros; escolheu-se o código BCH (31,26) que corrige um erro simples por palavra. À saída da sub-unidade C1 teremos pois 31 símbolos binários por mensagem da fonte o que equivale a dizer que

$$\lambda=1$$
$$\nu=31$$

A reordenação é feita através de uma matriz de 31×31 símbolos, em que estes são extraídos por linhas e portanto a função φ_B transforma, secções de 961 símbolos X_i, isto é,

$$\mu=961$$

Conclui-se em face destes números que a análise estatística se deve referir a $\omega=961$ símbolos binários e $\eta=31$ mensagens do alfabeto fonte (ou do destinatário).

A Fig. 4 explica a codificação obtida pela unidade C2; os símbolos correspondentes são

$$\begin{aligned} X_{L+1} &= B_{I+1} \\ X_{L+2} &= B_{I+32} \\ X_{L+3} &= B_{I+63} \\ X_{L+4} &= B_{I+94} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_{L+31} &= B_{I+931} \\ X_{L+32} &= B_{I+2} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_{L+961} &= B_{I+961} \end{aligned}$$

A explicação da descodificação, processada em D1 e que corresponde ao processo inverso de codificação C2, é apresentada na Fig. 5.

A sub-unidade D2 descodifica, com eventual

$$\begin{bmatrix} B_{l+1} & B_{l+32} & \cdot & \cdot & B_{l+931} \\ B_{l+2} & B_{l+33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{l+31} & B_{l+62} & \cdot & \cdot & B_{l+961} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_{L+1} & X_{L+2} & \cdots & X_{L+31} \\ X_{L+32} & X_{L+33} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_{L+931} & X_{L+932} & \cdots & X_{L+961} \end{bmatrix}$$

Fig. 4

$$\begin{bmatrix} Y_{N+1} & Y_{N+2} & \cdots & Y_{N+31} \\ Y_{N+32} & Y_{N+33} & \cdots & Y_{N+62} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Y_{N+931} & \cdots & \cdots & Y_{N+961} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} U_{M+1} & U_{M+32} & \cdot & \cdot & U_{M+931} \\ U_{M+2} & U_{M+33} & \cdot & \cdot & U_{M+932} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{M+31} & \cdot & \cdot & \cdot & U_{M+961} \end{bmatrix}$$

Fig. 5

correcção de um erro, palavras de 31 símbolos e, portanto,

$$V_{K+1} = \varphi_D (U_{M+1}, U_{M+2}, \ldots, U_{M+31}) \qquad (73)$$

em que os valores tomados por V_{K+1} correspondem a mensagens do alfabeto do destinatário (igual ao alfabeto da fonte).

Como o código corrector de erros só corrige erros simples (um erro em cada palavra de 31 símbolos) e os símbolos da mesma palavra são os que se encontram na mesma coluna da matriz da Fig. 5, a mensagem V_K só será recebida correctamente pelo destinário se

$$\sum_{c=o}^{30} E_{N+1+31.c} \leqslant 1 \qquad (74)$$

A razão está em que, nos símbolos binários da 1.ª coluna, ou não há erros ou há quanto muito um erro de que o código corrector toma conta.

Logo, no modelo proposto, a função γ_R é caracterizada pelas seguintes relações, para $\forall j = 1, 2, \ldots, 31$:

$$\begin{cases} \sum_{C=o}^{30} E_{N+j+31.c} \leqslant 1 \implies G_{K+j} = 0 \\ \sum_{C=o}^{30} E_{N+j+31.c} > 1 \implies G_{K+j} = 1 \end{cases} \qquad (75)$$

2.4 Funcionamento estatistico do modelo

O funcionamento deste modelo vai ser avaliado através da probabilidade de não haver erros em 31 mensagens consecutivas:

$$G_{K+j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \ldots, 31$$

Se não existisse a rearrumação dada pelo conjunto C2-D1, a probabilidade de não haver erros em 31 mensagens consecutivas seria dada por

$$P_{oo}^{960} \left(P_o + \frac{1 - P_o}{3} \right) \left(1 + \frac{P_{o1}}{P_{oo}} \right) \qquad (76)$$

Mas no nosso caso será necessário recorrer à expressão (71) que iremos modificar no sentido de facilitar o cálculo.

A probabilidade em que estamos interessados

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{31} (G_{K+j} = 0)\right\} \qquad (77)$$

exige o conhecimento do domínio D_h que compreende todas as sequências

$$h_{L+1}, h_{L+2}, h_{L+3}, \ldots, h_{L+961} \qquad (78)$$

que através de ρ e γ_R dão origem à sequência

$$(g_{K+1}, g_{K+2}, \ldots, g_{K+31}) = (0, 0, \ldots, 0) \qquad (79)$$

Ora, dada a estratégia de codificação, expressa por γ_R, sabemos que se deve ter quanto muito um *erro binário* por coluna, nas matrizes indicadas na Fig. 5. Não esquecer que a sequência dos h_i exige algumas ligações entre colunas, por via da dependência imposta no modelo de ruído intermitente, expressa por ρ e patente na Fig. 3; estas ligações relacionam-se com o facto do «burst» ocupar obrigatòriamente 3 intervalos consecutivos de dimensão. Δ.

Vamos classificar as sequências (78) pertencentes ao domínio D_h segundo dois critérios que incidem sobre:

a) Aquilo a que chamaremos configurações extremas e é expresso pelo par de símbolos extremos (h_{L+1}, h_{L+961});

b) A densidade de estados de ruído $(W = 1)$ registados na sequência (78) e é expresso por um número m, que se relaciona com o número de «bursts».

Existem $4^2 = 16$ configurações terminais pelo facto do 1.º e do último símbolo poderem ser qualquer dos quatro que pertencem a $\Omega(N_i) = \{0, 1, 2, 3\}$. Utilizaremos um índice a para designar as diferentes configurações terminais

$$a = 0, 1, \ldots, 15$$

m define-se como o maior inteiro no quociente $\frac{N}{3}$ em que N é o número total de *erros binários* na sequência e como o número N pode variar entre 0 e 31 no cálculo da probabilidade (77), então teremos

$$m = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

A classificação indicada permite considerar $10 \times 16 = 160$ diferentes classes de sequências, a designar por (m, a). Algumas destas classes são vazias por corresponderem a situações impossíveis, como por exemplo a configuração terminal $(h_{L+1}, h_{L+931}) = (1,3)$ com $m = 0$ ou com $m = 1$.

Dentro de qualquer classe (m, a) todas as sequências se associam à mesma probabilidade $P\left\{\bigcap_{i=1}^{961} (N_{L+i} = h_{L+i})\right\}$ que passaremos a designar por $\Lambda(m, a)$ para pôr em evidência a sua dependência na classificação introduzida. É a existência desta propriedade que nos levou a adoptar a classificação segundo (m, a).

Seja $\Gamma(m, a)$ o número de sequências distintas da classe (m, a) no domínio D_h e então a expressão (71) pode escrever-se

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{31} (G_{K+j} = 0)\right\} = \sum_{a=0}^{15} \sum_{m=0}^{10} \Gamma(m, a) . \Lambda(m, a) \qquad (80)$$

O factor $\Gamma(m, a)$ depende exclusivamente da estratégia de codificação e da hipótese do «burst» ter dimensão (3Δ); não depende, pois, de P_0, ou seja, da percentagem de tempo que o canal se encontra com elevado nível de ruído. Como as probabilidades de transição (67) dependem de P_0 pode dizer-se que o factor $\Gamma(m, a)$ é independente da distribuição estatística das transições. Este factor toma a forma seguinte

$$\Gamma(m, a) = \sum_{g=0}^{G} C(m, a, g) . L(m, a, g) \qquad (81)$$

em que:

— g representa o número de grupos de colunas sem erro, na matriz de descodificação (Fig. 5);

— o somatório estende-se a todos os valores de g, desde zero a um valor máximo G;

— $C(m, a, g)$ indica o número de casos resultantes de arrumar *por colunas* os «bursts» e os grupos de colunas sem erro, quando se tem a densidade de «bursts» indicada por m, a configuração terminal a e g grupos de colunas sem erro;

— $L(m, a, g)$ expressa o número de casos resultantes de arrumar os «bursts» *por linhas* da matriz de descodificação, para o caso m, a e g.

As expressões típicas destes dois factores são as seguintes:

$$\begin{cases} C(m, a, g) = C_{g+\cdot}^{m+g+\cdot}\, C_{g-1}^{30-3m+\cdot} \\ L(m, a, g) = 30^{m-g+\cdot}\, 31^{g-1} \end{cases} \qquad (82)$$

Passando, agora, ao factor $\Lambda(m, a)$ pode verificar-se que depende da probabilidade P_0 e das probabilidades de transição mas não depende da estratégia de codificação utilizada no sistema. Pode factorizar-se numa parte que só depende de m e noutra que só depende da configuração terminal a.

$$\Lambda(m, a) = (P_{00}^{960-4.m}\, P_{01}^{m}).\ T(a). \qquad (83)$$

Substituindo em (80) obtém-se

$$\sum_{m=0}^{10} P_{00}^{960-4m}\, P_{01}^{m} \sum_{a=0}^{15} T(a).$$
$$\sum_{g=0}^{G} C(m, a, g.)\quad (L\ m, a, g) \qquad (84)$$

Tal como se indica no Apêndice, as 16 parcelas do somatório em a podem reagrupar-se passando a ter-se só 7 parcelas, num somatório indiciado por k,

$$\sum_{a=0}^{15} T(a) \sum_{g=0}^{G} C(m, a, g).\ L(m, a\ g) =$$
$$= \sum_{k=1}^{7} T_A(k) \sum_{g=0}^{G} C_A(m, k, g)\ L_A(m, k, g) \qquad (85)$$

No texto designou-se

$$K_k(m) = \sum_{g=0}^{G} C_A(m, k, g).\ L_A(m, k, g)$$

$O = T_A(1)$
$Q = T_A(2)$
$R = T_A(3)$
$S = T_A(4)$
$T = T_A(5)$
$U = T_A(6)$
$V = T_A(7)$
$A = P_{01}.\ P_{00}^{-4}$

pelo que a expressão final utilizada no cálculo foi

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{31} (G_{K+j} = 0)\right\} = P_{00}^{960} \sum_{m=0}^{10} \qquad (86)$$
$$A^{m}\Big[O.\ K_1(m) + Q.\ K_2(m) + R.\ K_3(m) +$$
$$+ S.\ K_4(m) + T.\ K_5(m) + U.\ K_6(m) + V.\ K_7(m)\Big]$$

Para o pormenor das passagens e das expressões detalha-se esta parte no Apêndice.

2.5 Resultados

De posse da expressão da probabilidade (86) há que calcular o seu valor para determinados valores de P_0, único parâmetro ainda por definir.

Começou-se por fazer $P_0 = 0{,}9$ tendo-se obtido

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{31} (G_{K+j} = 0)\right\} \simeq 1{,}35 . 10^{-10}$$

Sem reordenação, isto é, pela fórmula (76) obteve-se

$$1{,}8 . 10^{-16}$$

Mas, dado que estes valores são muito pequenos, não se podem comparar com o método de Monte Carlo e portanto, experimentou-se o valor de $P_0 = 0{,}99$. O resultado a partir da expressão (86) é

$$0{,}549 = 54{,}9\ \%$$

ou, mais precisamente, encontra-se no intervalo

$$(0{,}54894 ; 0{,}54901)$$

em que se recorreu ao majorante do erro cometido por arredondamentos e propagado através dos cálculos. O majorante deste erro é estimado em $3 . 10^{-5}$, valor que se obteve por aplicação da teoria dos erros de arredondamento para números com mantissa fixa e igual a oito e por aplicação da teoria da propagação dos erros à expressão (86).

A ordem de grandeza do resultado já permite comparação com o resultado obtido pelo método de Monte Carlo, tal como se fará a seguir.

Na suposição de não haver a reordenação processada por C2-D1 obtém-se

$$0{,}03912 \simeq 3{,}9\ \%$$

3 MÉTODO DE MONTE CARLO

Pelo método de Monte Carlo procedeu-se, à custa da geração de números aleatórios e de ensaios estatísticos efectuados num computador, à determinação de uma estimativa da probabilidade de não haver erros em 31 mensagens consecutivas.

Com o gerador de números aleatórios pretendeu-se duplicar a sequência de estados de ruído, do ponto de vista estatístico. No modelo proposto a presença de «burst» determina a existência de *erros binários* cuja posição na matriz de descodificação se vai registar em memória, à medida que, no computador, se geram os estados de ruído.

```
      ERROR CORRECTING CODE OPERATION
      BURST ERROR CHANNEL
      MONTE CARLO METHOD

      DIMENSION E(31)
      DIMENSION U(10),J(10)
      R = 2357
      K = 1
      READ 99,AM,BM,CM,DM,EM,FM
      DO 2 L =1,10
      READ 99,U(L)
    2 READ 95,J(L)
      READ 800, PO
      P00=10000.*(4.*PO-1.)/PO/3.
      P1= (1.-PO)/3.
      PRINT 951,PO,P1,P00
      JJ=1
  900 ER= 0.
      DO 206 NN=1,100
      DO 204KK=1,31
  204 E(KK)=0.
      DO 205 L=1,31
      DO 205KK=1,31
      GO TO (101,212,213,214),JJ
  101 J(K) = J(K) -1
      IF(J(K)) 1,1,100
    1 J(K) = K
      SM = U(K)
      U(K) = AM
      AM = BM
      BM = CM
      CM = DM
      DM = EM
      EM = FM
      FM = SM
  100 R = R*U(K)
      K = R
      R = K
      K = K/1000+1
      RQQ= R-PO0
      IF(RQQ) 232,232,231
  232 JJ=1
      GO TO 205
  231 JJ=2
      GO TO 205
  212 JJ=3
      GO TO 210
  213 JJ=4
      GO TO 210
  214 JJ=1
  210 IF(E(KK)-1.) 200,201,201
  201 ER=ER+1.
      QQQ=10000.-PO0
      IF(RQQ-QQQ*P1) 225,225,226
  225 JJ=4
      GO TO 206
  226 IF(RQQ-QQQ*2.*P1) 227,228,228
  227 JJ=3
      GO TO 206
  228 IF(RQQ-QQQ*3.*P1) 229,230,230
  229 JJ=2
      GO TO 206

  230 JJ=1
      GO TO 206
  200 E(KK)=1.
  205 CONTINUE
  206 CONTINUE
      VM = .01*ER
      PRINT 801, VM
      GO TO 900
  800 FORMAT(F5.4)
  801 FORMAT(/11HVALOR MEDIO,F6.4)
  850 FORMAT(I2)
  851 FORMAT(14HPARAMETROS PO=,F6.4,/11X,3HP1=,F6.4,/10X,4HP00=,F6.4)
   95 FORMAT(I4)
   99 FORMAT(F5.0,F5.0,F5.0,F5.0,F5.0,F5.0)
      END
```

Fig. 6

Sempre que numa coluna se regista o 2.º erro, já se sabe que o conjunto das 31 mensagens não é correctamente transmitido; dir-se-á que nesta matriz se dá a ocorrência de um *insucesso* e não vale a pena continuar o ensaio estatístico nessa matriz, pelo que se inicia o preenchimento de uma nova matriz. Sempre que se consegue preencher uma matriz até ao fim sem que se registe mais de um *erro binário* por coluna, então dir-se-á que esta prova nos conduziu a um *sucesso*. Ao fim de 100 provas, ou seja, de ensaiar 100 matrizes, determina-se a frequência relativa dos *sucessos*. Este valor fornece uma estimativa da probabilidade do acontecimento *sucesso*, que neste caso se refere à transmissão de 31 mensagens consecutivas sem erro.

O programa utilizado encontra-se na Fig. 6, chamando-se a atenção para o facto do gerador de números aleatórios utilizado ser o descrito por um dos autores na bibliografia e de o programa se referir à determinação da probabilidade de *insucesso* pelo que é necessário transformá-la na probabilidade de *sucesso*.

Como as matrizes são preenchidas com 961 valores verifica-se que em cada determinação se exige, em princípio, a geração de $961 \times 100 = 96\,100$ números aleatórios. Este facto torna a determinação dispendiosa pelo elevado tempo de utilização do computador; só se realizaram 4 determinações cujos resultados estão no Quadro I.

QUADRO I

Ensaio n.º	Estimativa resultante
1	0,53
2	0,58
3	0,55
4	0,64

A média das estimativas é ainda uma estimativa (de menor variância) e, por conseguinte, o método de Monte Carlo dá-nos o resultado final de

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{31} (G_{K+i} = 0)\right\} \simeq 57{,}5\,\%$$

4 CONCLUSÕES

As conclusões a tirar deste trabalho são a confirmação da elevada eficiência do reordenador C2-D1 e a concordância apreciável entre os resultados obtidos pelo método analítico e pelo método de Monte Carlo.

Além disso este trabalho encoraja o prosseguimento da exploração do método analítico no que se refere à utilização de «bursts» de outras dimensões, de matrizes de reordenação rectangulares e de outros códigos correctores de erros simples. Em contrapartida no método de Monte Carlo pode-se tornar a dimensão do «burst» aleatória e realista o funcionamento do conjunto (E, CF, R) para além das variações indicadas para prosseguimento do método analítico.

AGRADECIMENTO

Os autores querem expressar o seu agradecimento à Companhia IBM pelas facilidades de cálculo concedidas, sem as quais teria sido pelo menos impossível a parte respeitante ao método de Monte Carlo.

BIBLIOGRAFIA

R. ASH — Information Theory: — Interscience Publishers, — 1965;

A. CERVEIRA — Introdução aos processos estocásticos — *Técnica*, Vol. 38, N.º 325 (Fev. 1963), pp. 349-376;

A. CERVEIRA — Geração de números aleatóris em computadores — *Técnica*, Vol. 44, N.º 392 (Nov. 1969), pp. 59-69;

A. KHINCHIN — Mathematical Foundations of Information Theory — Dover — 1957;

C. LORENS — Flowgraphs — McGraw-Hill — 1964;

D. McCRACKEN, W. DORN — Numerical Method and Fortran Programming — John Wiley — 1964;

D. MIDDLETON Topics in Communication Theory — McGraw-Hill — 1965;

A. MOOD, F. GRAYBILL — Introduction to the Theory of Statistics — McGraw-Hill — 1963;

A. PAPOULIS — Probability, Random Variables and Stochastic Processes — McGraw-Hill — 1965;

W. PETERSON — Error-correcting Codes — M. I. T. Press — 1961;

F. REZA — An Introduction to Information Theory — McGraw-Hill — 1961;

C. SHANNON — The Mathematical Theory of Communication — *Bell System Tech. J.*, (Jul.-Oct. 1948), pp. 379-424 e 623-657;

D. SLEPIAN — Bounds on communication — *Bell System Tech. J.*, (May 1963), pp. 681-707.

APÊNDICE

Obtenção da expressão da probabilidade $P\left\{\bigcap_{j=1}^{31}(G_{k+j}=0)\right\}$ dada pela expressão (86) no texto:

Recordemos a notação:

N: n.º total de erros

m: parte inteira do cociente $\frac{N}{3}$

g: n.º de grupos de colunas sem erro que se podem formar com as $31-N$ colunas sem erros da matriz da descodificação (Fig. 5).

Vamos representar mais simplesmente a sequência:

$$N_{L+1}=h_{L+1}, \ldots\ldots, N_{L+961}=h_{L+961} \qquad (1\text{-I})$$

por:

$$h_{L+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, h_{L+961} \qquad (2\text{-I})$$

em que sabemos que qualquer h pertence a $\Omega(N_i)=\{0, 1, 2, 3\}$.

Podemos decompôr $P\left\{\bigcap_{j=1}^{31}(G_{k+j}=0)\right\}$ como se viu, em:

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{31}(G_{k+j}=0)\right\}=\sum \Gamma(m, a).\ \Lambda(m, a) \qquad (3\text{-I})$$

em que:

$\Lambda(m, a)$ nos dá conta da probabilidade correspondente a uma dada configuração da sequência (2-I).

$\Gamma(m, a)$ diz-nos quantas configurações distintas exibem o mesmo valor da probabilidade $\Lambda(m, a)$, ou seja, pertencem à mesma classe (m, a).

I — Para determinarmos o valor de $\Lambda(m, a)$ atendemos essencialmente ao aspecto dos extremos da sequência de 961 símbolos:

$$h_{L+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, h_{L+961}$$

Podemos uniformizar a sua dependência em m, factorizando:

$$\Lambda(m, a)=P_{00}^{960-4m}\ P_{01}^{m}\ T(a) \qquad (4\text{-I})$$

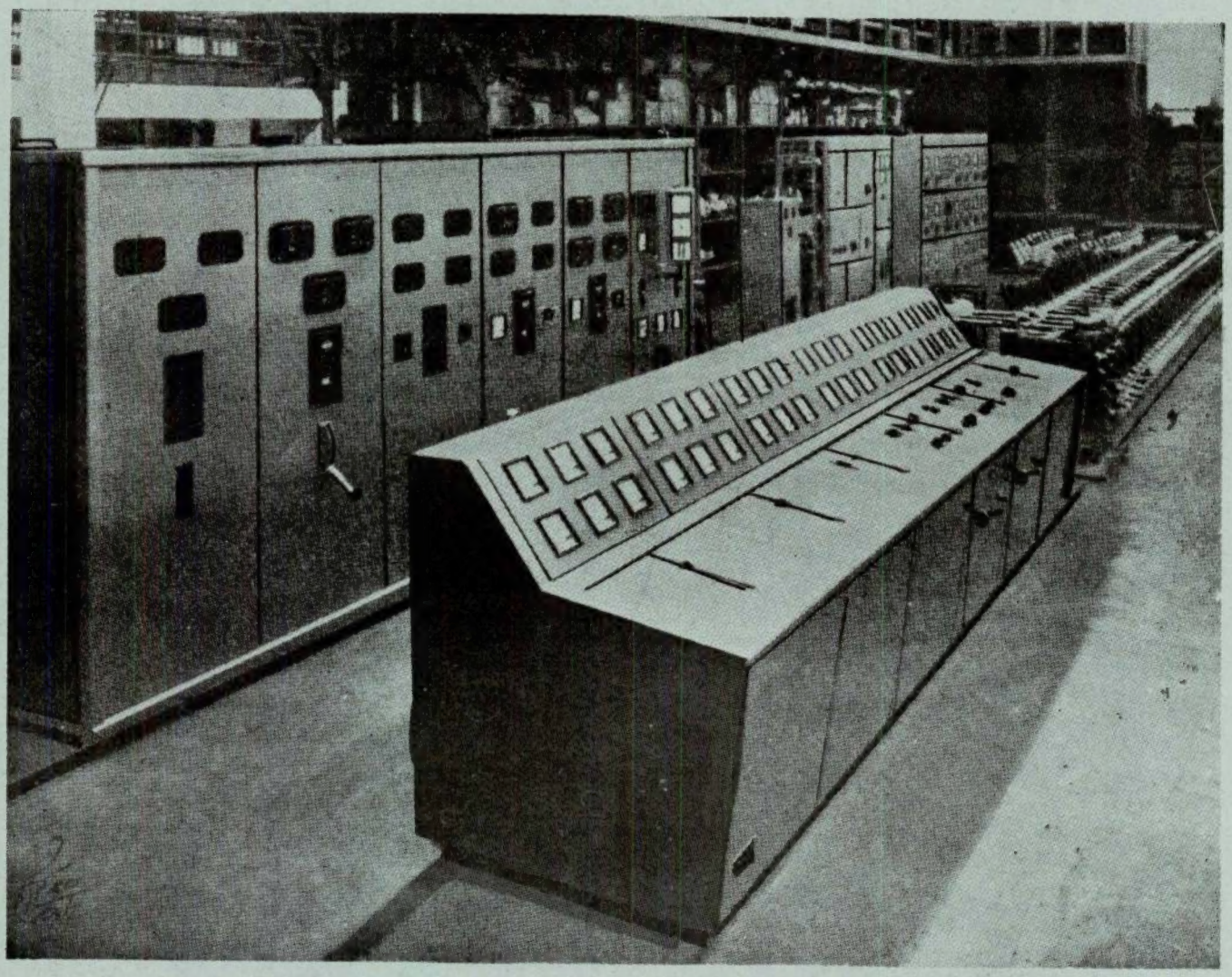
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743

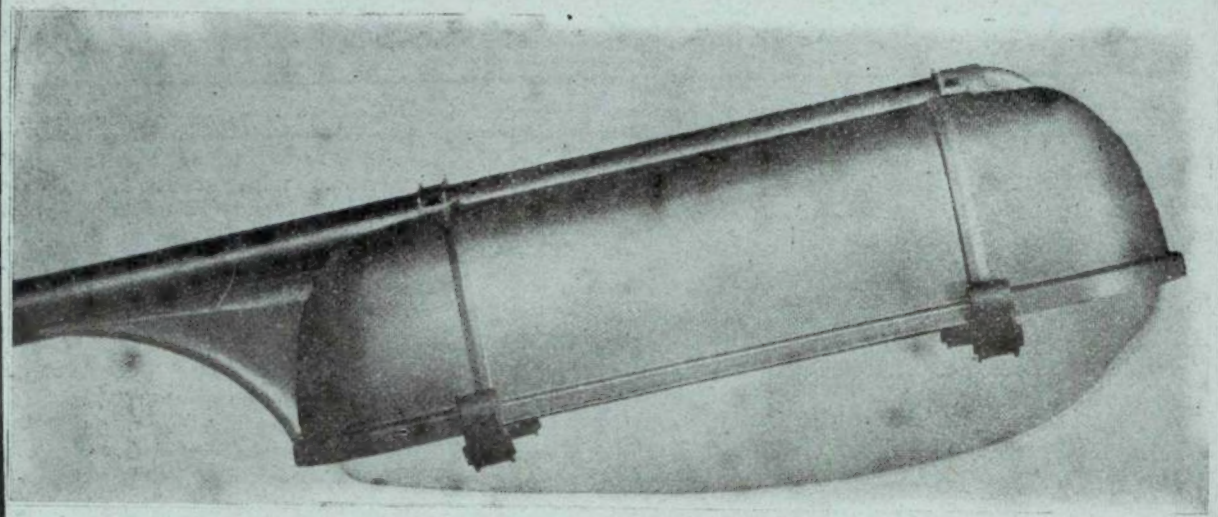


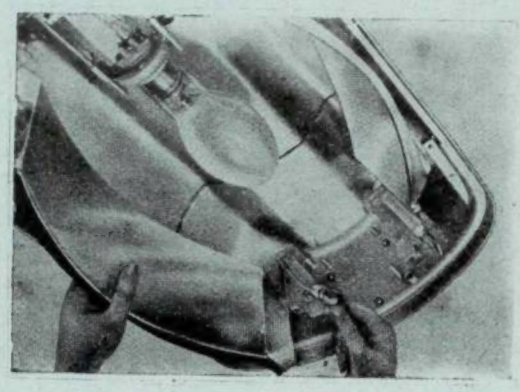
Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

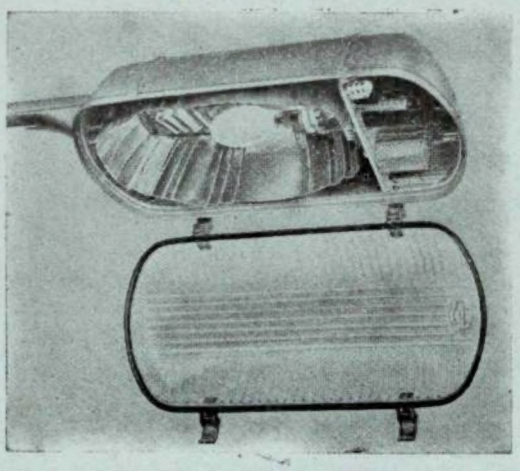
- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

ARMADURA DE ILUMINAÇÃO

TIPO **HM**







Os aparelhos da classe HM caracterizam-se pela posição horizontal das fontes luminosas, facto que aumenta as suas qualidades fotométricas. Podem receber lâmpadas de 250 a 1000 watts, o que permite responder às exigências de níveis cada vez mais elevados.

CONSTRUÇÕES ELÉCTRICAS SCHRÉDER, LDA.

P. JOSÉ FONTANA, 25-3°ESQ · TEL. 561001/2/3

em que T (a) depende apenas da classe a a que pertence a sequência em estudo.

II — O valor de Γ (m, a) calcula-se considerando a arrumação dos «bursts» intermédios, procedendo-se a um raciocínio exaustivo e decompondo-se em 3 grupos de factores.

Analisando a arrumação das unidades de ruído pelas linhas e colunas da matriz utilizada pelo descodificador da matriz da fig. 5, teremos que considerar:

II-1 Arrumação dos «bursts» pelas colunas da matriz.

II-1-1 Arrumação dos «bursts» por grupos de colunas de «bursts» da matriz.

É-se conduzido a factores do tipo:

$$C_{g+.}^{m+.}$$

II-1-2 Arrumação dos intervalos entre grupos de colunas sem erro pelos intervalos entre colunas sem erro.

Resultam factores do tipo:

$$C_{g-1}^{30-N}$$

II-2 Arrumação dos «bursts» pelas linhas da matriz:

Notando que a fixação de dada casa numa coluna, retira uma possibilidade (um «burst» na inésima linha das colunas j — 3, j — 2, j — 1, impõe um zero na inésima linha da coluna j). É-se conduzido a factores do tipo:

$$30^{m-g+.}\ 31^{g-1}\ 29^{.}$$

Exemplo de aplicação:

Vamos aplicar o raciocínio anterior à classe de configurações extremas a = (0,2), que segundo (2-I) se representa por:

$$0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 1,2$$

sendo para esta classe $N = 3m + 2$

I — $$T(a) = P_o P_{01} P_{00}{}^{-2}$$

vindo:

$$\Lambda(m, a) = P_o P_{01}^{m+1} P_{00}{}^{960-4m-2}$$

II-1-1 Representando gràficamente por:

B — um «burst»
| — um grupo de colunas sem erro

temos m «bursts» para arrumar em $g - 1$ diferentes locais, com a restrição de entre cada dois traços verticais haver pelo menos um «burst»:

$$\ldots |B| \ldots |B \ldots |B| \ldots$$

sendo-se conduzido a:

$$C_g^{m-(g-1)+g} = C_g^{m+1}$$

II-1-2 A distribuição dos $g - 1$ intervalos entre grupos de colunas sem erro pelos $31 - N - 1$ intervalos entre colunas sem erro da matriz conduz-nos a:

$$C_{g-1}^{30-N} = C_{g-1}^{30-(3m+2)}$$

II-2 Entre cada dois grupos de colunas sem erro há um e um só «burst» que pode ocupar qualquer uma das 31 posições correspondentes às 31 linhas da matriz. Uma posição qualquer desse «burst» introduz uma limitação na posição dos «bursts» contíguos pelo que temos:

$$30^{m-(g-1)}\ 31^{g-1} = 30^{m+1-g}\ 31^{g-1}$$

Atendendo aos valores extremos de m e g, que para o exemplo em estudo são dados por:

a) $0 \leqslant m \leqslant 9$
b) $1 \leqslant g \leqslant G$ em que G é o menor dos valores $(m + 1)$ ou $(31 - N)$.

Temos pois para:

$$\Gamma(m, a) = \sum_{g=1}^{G} C_g^{m+1}\ C_{g-1}^{30-(3m+2)}\ 31^{g-1}\ 30^{m-g+1}$$

e para expressão da probabilidade de ocorrência de qualquer configuração pertencente à classe (0,2):

$$\sum_{m=0}^{9} \sum_{g=1}^{G} P_o P_{01}^{m+1} P_{00}^{960-4m-2} C_g^{m+1} C_{g-1}^{30-(3m+2)}.\ 30^{m-g+1}\ 31^{g-1}$$

Vamos seguidamente apresentar no quadro (1-I) de forma sistemática os resultados a que se chega, aplicando o raciocínio anterior sucessivamente às restantes 15 classes de sequências:

QUADRO 1-I

a	h_{L+1}	h_{L+961}	T (a)	C (m, g, a) = $C_{g+.}^{m+.}$ C_{g-1}^{31-N}		L=$30^{m-g+.}$ 31^{g-1}	m	
				$C_{g+.}^{m+.}$	C_{g-1}^{31-N}		$m_{min.}$	$m_{máx.}$
0	0	0	P_0	$30\,C_g^m + 2x30\,C_g^{m} + 29\,C_g^{m-1} + 30\,C_{g-1}^{m-1}$	C_{g-1}^{30-3m}	30^{m-g} 31^{g-1}	0	10
1	0	1	$P_0\ P_{0,1}^{-1}\ P_{0,0}$	C_g^{m+1}	$C_{g-1}^{30-(3m+1)}$	30^{m-g+1} 31^{g-1}	0	9
2	0	2	$P_0\ P_{0,1}^{-2}\ P_{0,0}$	C_g^{m+1}	$C_{g-1}^{30-(3m+2)}$	30^{m-g+1} 31^{g-1}	0	9
3	0	3	$P_0\ P_{0,0}$	C_g^m	C_{g-1}^{30-3m}	30^{m-g} 31^{g-1}	1	10
4	1	0	$P_1\ P_{0,1}^{-1}\ P_{00}$	C_g^m	C_{g-1}^{30-3m}	30^{m-g} 31^{g-1}	1	10
5	1	1	P_1	C_g^m	$C_{g-1}^{30-(3m+1)}$	30^{m-g} 31^{g-1}	1	9
6	1	2	$P_1\ P_{0,0}^{-1}$	C_g^m	$C_{g-1}^{30-(3m+2)}$	30^{m-g} 31^{g-1}	1	9
7	1	3	$P_1\ P_{0,1}^{-1}\ P_{0,0}^{2}$	C_g^{m-1}	C_{g-1}^{30-3m}	30^{m-g-1} 31^{g-1}	2	10
8	2	0	$P_2\ P_{0,0}^{-2}$	C_g^{m+1}	$C_{g-1}^{30-(3m+2)}$	30^{m-g+1} 31^{g-1}	0	9
9	2	1	$P_2\ P_{0,0}^{+1}$	C_g^m	C_{g-1}^{30-3m}	30^{m-g} 31^{g-1}	1	10
10	2	2	P_2	C_g^m	$C_{g-1}^{30-(3m+1)}$	30^{m-g} 31^{g-1}	1	9
11	2	3	$P_2\ P_{0,0}^{-1}$	C_g^m	$C_{g-1}^{30-(3m+2)}$	30^{m-g} 31^{g-1}	1	9
12	3	0	$P_3\ P_{0,0}^{-1}$	C_g^{m+1}	$C_{g-1}^{30-(3m+1)}$	30^{m-g+1} 31^{g-1}	0	9
13	3	1	$P_3\ P_{0,1}^{+1}\ P_{0,0}^{-2}$	C_g^{m+1}	$C_{g-1}^{30-(3m+2)}$	30^{m-g+1} 31^{g-1}	0	9
14	3	2	$P_3\ P_{0,0}$	C_g^m	C_{g-1}^{30-3m}	30^{m-g} 31^{g-1}	1	10
15	3	3	P_3	C_g^m	$C_{g-1}^{30-(3m+1)}$	30^{m-g} 31^{g-1}	1	9

No quadro anterior excluiram-se as sequências em que $N = 31$ erros, pois há uma alteração do factor:

$$L\ (m, g, a) = 30^{m-g+1} \cdot 31^{g-1}$$

e do factor:

$$C_{g-1}^{30-N}$$

que se reduz à unidade.

Resulta, de acordo com as classes a que pertencem as sequências em que $N = 31$, o quadro (2-I).

Convencionando que o algoritmo C_q^p passa a representar:

C_q^p = combinações de p elementos tomados q a q, para $p > 0, 0 < q < p$

$C_0^0 = 1$

$C_q^p = 0$ para $p < 0$ ou $q > p$

consegue fazer-se uma uniformização dos índices dos somatórios dos quadros (1-I) e (2-I).

Somando todas as parcelas, procedendo a um arranjo algébrico, pode concluir-se a expressão da probabilidade:

$$P\left\{\bigcap_{j=1}^{31} (G_{k+j} = 0)\right\} =$$

$$P_{00}^{960} \sum_{m=0}^{10} A^m \Big[O.K_1(m) + Q.K_2(m) + R.K_3(m) +$$

$$+ S.K_4(m) + T.K_5(m) + U.K_6(m) + V.K_7(m) \Big]$$

tal como indicada no texto por (86) e onde:

$$O = 30.P_0$$

$$Q = 2.30.P_0 + P_{00}(P_0 + P_2 + P_3) + P_1.P_{00}.P_{01}^{-1}$$

$$R = 29.P_0 + P_1.P_{01}^{-1}.P_{00}^2.30^{-1}$$

$$S = P_1 + P_2 + P_3$$

$$T = 30.(P_0.P_{01}.P_{00}^{-1} + P_3.P_{00}^{-1})$$

$$U = (P_1 + P_2).P_{00}^{-1}$$

QUADRO 2-I

a	h_{L+1}	h_{L+961}	$T(a)$	$C(m, g, a)$	$L(m, g, a)$
1	0	1	$P_0 P_{01} P_{00}^{-1}$	C_g^{11}	$\sum_{p=0}^{5} 30^p\ 29^{10-2p}\ C_p^{10-p}$
5	1	1	P_1	C_g^{10}	$\sum_{p=0}^{4} 30^p\ 29^{9-2p}\ C_p^{9-p}$
10	2	2	P_2	C_g^{10}	$\sum_{p=0}^{4} 30^p\ 29^{9-2p}\ C_p^{9-p}$
12	3	0	$P_3\ P_{00}^{-1}$	C_g^{11}	$\sum_{p=0}^{5} 30^p\ 29^{10-2p}\ C_p^{10-p}$
15	3	3	P_3	C_g^{10}	$\sum_{p=0}^{4} 30^p\ 29^{9-2p}\ C_p^{9-p}$

$$V = 30 . P_{00}^{-2} \left| P_2 + P_{01} . (P_5 + P_o) \right|$$

$$A = P_{01} . P_{00}^{-1}$$

e:

$$K_1 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-3m} (C_{g-1}^{m} + C_{g-1}^{m-1})$$

$$K_2 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-3m} C_{g}^{m}$$

$$K_3 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-3m} C_{g}^{m-1}$$

$$K_6 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-(3m+2)} C_{g}^{m}$$

$$K_7 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-(3m+2)} C_{g}^{m+1}$$

quanto a $K_4(m)$ e $K_5(m)$ é preferível dar uma versão modificada, isolando a parcela correspondente às sequências em que $N = 31$, e que representamos por P_{31}. Teremos:

1) $0 \leqslant m \leqslant 9$:

$$K_4 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-(3m+1)} C_{g}^{m}$$

$$K_5 (m) = \sum_{g=1}^{G} 30^{m-g} 31^{g-1} C_{g-1}^{30-(3m+1)} C_{g}^{m}$$

2) $m = 10$: é-se conduzido à parcela P_{31} cujo cálculo se indicou no quadro (2-I).

AOS NOSSOS ASSINANTES

Para poder suportar o rápido aumento do custo de vida que se tem verificado durante os últimos anos e que para a nossa revista se traduz em cerca de 25 % nas despesas de administração e confecção da revista, vemo-nos na necessidade de alterar a Tabela de Preços.

ASSINATURA:	5 n.os	10 n.os
— Continente e Ilhas.	85$00	160$00
— Ultramar, Brasil e Espanha. . .	95$00	170$00
— Estrangeiro	—	180$00
Número avulso: 25$00		

a qual entra em vigor a partir do n.º 394 relativo a Janeiro de 1970.

Esperamos a continuidade da vossa compreensão.

SIEMENS

B 67 014

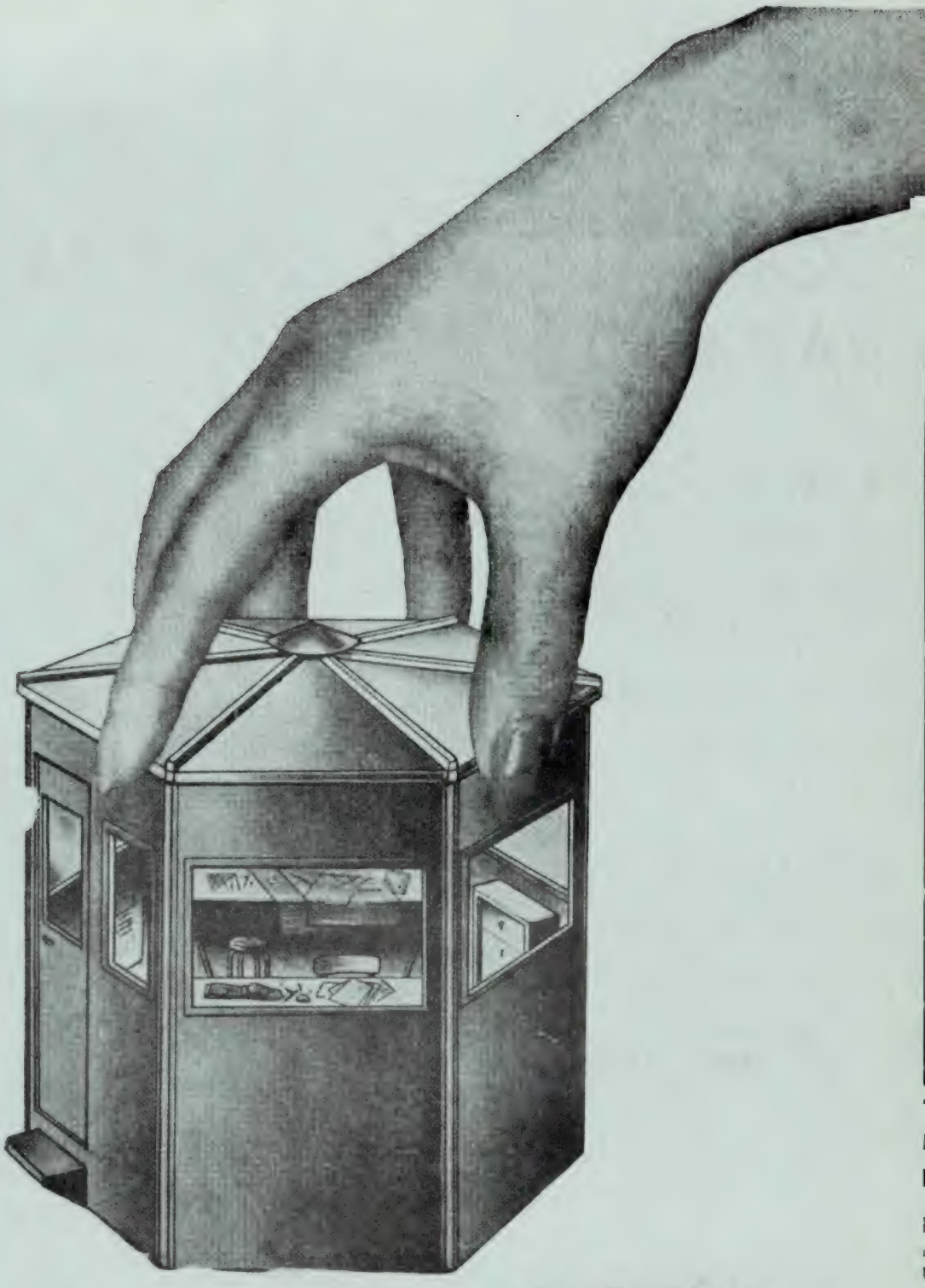
CONTADORES ESPECIAIS PARA TODOS OS FINS

- DE DUPLA TARIFA
- DE PONTA MÁXIMA
- COM ÍNDICE ACUMULATIVO DE MÁXIMA
- DE ENERGIA REACTIVA
- EMISSORES DE IMPULSOS
- TOTALIZADORES
- MAXÍMETROS
- MAXÍGRAFOS
- RELÓGIOS DE CONTACTOS
- SISTEMAS DE VIGILÂNCIA DE PONTA MÁXIMA

Consulte sem compromisso a

SIEMENS-COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S.A.R.L.

LISBOA-1 — AV. ALMIRANTE REIS, 65 — TEL. 53 69 21/0 • PORTO — RUA DAS CARMELITAS, 26 - 2.º — TEL. 2 89 43/7



ESCRITÓRIOS MÓVEIS "RÉEL"

FABRICA PORTUGAL

RUA FEBO MONIZ, 20 — LISBOA-1

C. D. U. 517.91 : 534.1

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS CORRESPONDENTES A SISTEMAS VIBRANTES COM W GRAUS DE LIBERDADE

por DIAMANTINO GOMES DURÃO
Do Curso de Eng.ª Mecânica

RESUMO

Apresenta-se a maneira de resolver equações diferenciais referentes a sistemas vibrantes com w graus de liberdade. As forças e os deslocamentos têm de ser desenvolvidos em séries harmónicas.

Para facilitar a compreensão da exposição são usadas diferentes notações.

No final faz-se a aplicação da teoria desenvolvida a um caso particular com 2 graus de liberdade.

SYNOPSIS

A way of solving differential equations applied to vibrating systems with W *degrees of freedom is presented.*

Forces and displacements are discribed in harmonic series.

To make easy the comprehension of the exposition, different notations are used.

At the end it is made a application of the developed theory to a particular case with two degrees of freedom.

1. — DEDUÇÃO TEÓRICA

1.1. — Sistemas com um grau de liberdade

Consideremos um sistema vibrante com um grau de liberdade, definido por uma equação diferencial do 2.º grau do tipo

$$A \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + C x = F \tag{1}$$

onde:

$A \frac{d^2 x}{dt^2}$ é o termo referente às forças de inércia

$B \frac{dx}{dt}$ é o termo referente às forças de amortecimento viscoso

$C x$ é o termo referente às forças elásticas

e F é o termo que traduz as forças exteriores

Noutra notação (1) pode escrever-se

$$A\, D^2(2) + B\, D^1(x) + C\, D^0(x) = F \tag{2}$$

onde D^0, D^1 e D^2 são operados que representam respectivamente as derivadas de ordem zero, um e dois.

Tendo em vista esta notação, poderão aparecer operadores elevados a expoentes negativos que simbolizarão integrações. Assim

$$\int x\, dt = D^{-1}(x).$$

Por exemplo a equação do modelo eléctrico:

$$L \frac{di}{dt} + R\,i + \int \frac{1}{c}\, i\, dt = 0$$

poderá ser escrita:

$$L\, D^1(i) + R\, D^0(i) + \frac{1}{c}\, D^{-1}(i) = 0$$

ou fazendo uma simples mudança de variáveis:

$D^0(i) = D^1(x)$, o que corresponde a ter $i = \frac{dx}{dt}$ equação aparecerá com o aspecto

$$L\, D^2(x) + R\, D^1(x) + \frac{1}{c}\, D^0(x) = 0$$

A equação (2) poderá ser apresentada ainda sob a forma:

$$\sum_{l=0}^{2} {}_l A\, D^l(x) = F \tag{3}$$

Pois que desenvolvendo o somatório, (3) resulta

$${}_2A\, D^2(x) + {}_1A\, D^1(x) + {}_0A\, D^0(x) = F \tag{4}$$

Até aqui temos considerado apenas sistemas vibrantes definidos por uma equação diferencial do 2.º grau. Vamos agora passar a considerar sistemas vibrantes cujo modelo matemático envolve equações diferenciais de ordem n. Neste caso a equação (3) passará a ser:

$$\sum_{l=0}^{n} {}_l A\, D^l\,(x) = F \tag{5}$$

o que desenvolvendo resulta:

$${}_nA\, D^n\,(x) + {}_{n-1}A\, D^{n-1}\,(x) + \ldots + {}_2A\, D^2\,(x) + {}_1A\, D^1\,(x) + {}_0A\, D^0\,(x) = F$$

"${}_lA$" é um operador que converte a derivada de ordem l, $D^l\,(x)$ do deslocamento x, na força que lhe corresponde.

Quanto à interacção com o exterior haverá a considerar:

a) Existência de uma força real exterior a perturbar o sistema que é no caso geral função do tempo: f (t). Esta força será a compatível com as ligações.

b) Existência de deslocamentos y das ligações do sistema.

Havendo uma só ligação a equação (5) passaria a escrever-se:

$$\sum_{l=0}^{n} {}_l A\, D^l\,(x) = \sum_{m=0}^{h} {}_m B\, D^m\,(y) + f\,(t) \tag{6}$$

$\sum_{m=o}^{h} {}_mB\, D^m(y)$ representa as forças que actuam no sistema devido ao deslocamento de uma ligação e para se perceber não é preciso senão pensar que esta ligação pode estar sujeita a um outro sistema vibrante.

"${}_mB$" é um operador que converte a derivada de ordem m de desenvolvimento, na força que lhe corresponde.

O grau da equação diferencial que define o deslocamento da ligação é h.

Porém o sistema vibrante pode ter mais de uma ligação (fig. 1) e considerando então que existem a ligações, a equação (6) passa a escrever-se em notação matricial:

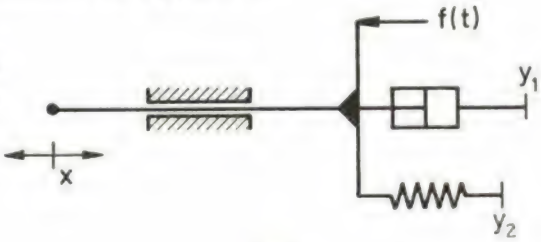


Fig. 1

$$\sum_{l=o}^{n} {}_lA\, D^l(x) = \sum_{m=o}^{h} \left[{}_mB_1 \;\; {}_mB_2 \cdots {}_mB_a \right] . D^m \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_a \end{bmatrix} + f(t) \qquad (7)$$

Em notação simbólica (7) aparece-nos com a seguinte forma:

$$\sum_{l=o}^{n} {}_lA\, D^l(x) = \sum_{m=o}^{m=h} \underset{(1,a)}{[{}_mB_b]}\, \underset{(a,1)}{D^m[y_b]} + f(t) \qquad (8)$$

$[{}_mB_b]$ e $[y_b]$ representam respectivamente as matrizes linha e coluna citadas em (7).

Escrevendo (7) com todo o desenvolvimento será:

$$\begin{aligned}
&{}_nA\, D^n(x) + {}_{n-1}A\, D^{n-1}(x) + \ldots + {}_2A\, D^2(x) + {}_1A\, D^1(x) + {}_oA\, D^o(x) = {}_hB_a\, D^h(y_a) + \\
&+ {}_{h-1}B_a\, D^{h-1}(y_a) + \ldots + {}_2B_a\, D^2(y_a) + {}_1B_a\, D^1(y_a) + {}_oB_a\, D^o(y_a) + {}_hB_{a-1}\, D^h(y_{a-1}) + \\
&+ {}_{h-1}B_{a-1}\, D^{h-1}(y_{a-1}) + \ldots + {}_2B_{a-1}\, D^2(y_{a-1}) + {}_1B_{a-1}\, D^1(y_{a-1}) + {}_oB_{a-1}\, D^o(y_{a-1}) + \ldots + \\
&+ {}_hB_2\, D^h(y_2) + {}_{h-1}B_2\, D^{h-1}(y_2) + \ldots + {}_2B_2\, D^2(y_2) + {}_1B_2\, D^1(y_2) + {}_oB_2\, D^o(y_2) + {}_hB_1\, D^h(y_1) + \\
&{}_{h-1}B_1\, D^{h-1}(y_1) + \ldots + {}_2B_1\, D^2(y_1) + {}_1B_1\, D^1(y_1) + {}_oB_1\, D^o(y_1) + f(t)
\end{aligned}$$

A equação (8) é a forma mais geral em que o problema a um grau de liberdade pode aparecer.

— n é o grau da equação diferencial do parâmetro definidor do sistema.

— l é a referência que define o termo da equação diferencial do parâmetro definidor do sistema.

— h é o maior grau das equações diferênciais definidoras dos deslocamentos das ligações suportes.

— m é a referência que define o termo da equação diferencial definidora do deslocamento de uma dada ligação.

— a é o número de ligações.

— b é a referência a uma ligação.

— ${}_lA$ é o Operador ligado ao termo que contém D^l na equação diferencial do parâmetro definidor do sistema.

— ${}_mB_b$ é o Operador ligado ao termo que contém D^m na equação diferencial da ligação y_b.

Acabamos de ver sistemas vibrantes com um grau de liberdade.

1.2. — Sistemas com W graus de liberdade

1.2.1 — Equação geral

Suponhamos primeiramente o caso mais simples das forças exteriores serem nulas e as equações diferenciais de 2.ª ordem.

Como há w graus de liberdade, os parâmetros definidores desse sistema são $x_1, x_2, \ldots, x_w$

No caso considerado aparecer-nos-ão w equações:

$$\left\{\begin{array}{l}
{}_2A_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + {}_1A_{11} \dfrac{d x_1}{dt} + {}_1A_{12} \dfrac{d x_2}{dt} + \ldots + {}_1A_{1w} \dfrac{d x_w}{dt} + {}_0A_{11} x_1 + {}_0A_{12} x_2 + \ldots + {}_0A_{1w} x_w = 0 \\[2ex]
{}_2A_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + {}_1A_{21} \dfrac{d x_1}{dt} + {}_1A_{22} \dfrac{d x_2}{dt} + \ldots + {}_1A_{2w} \dfrac{d x_w}{dt} + {}_0A_{21} x_1 + {}_0A_{22} x_2 + \ldots + {}_0A_{2w} x_w = 0 \\[2ex]
\vdots \\[2ex]
{}_2A_w \dfrac{d^2 x_w}{dt^2} + {}_1A_{w1} \dfrac{d x_1}{dt} + {}_1A_{w2} \dfrac{d x_2}{dt} + \ldots + {}_1A_{ww} \dfrac{d x_w}{dt} + {}_0A_{w1} x_1 + {}_0A_{w2} x_2 + \ldots + {}_0A_{ww} x_w = 0
\end{array}\right. \tag{9}$$

Em notação matricial o mesmo escreve-se:

$$\begin{bmatrix}
{}_2A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & {}_2A_2 & & & \vdots \\
0 & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & {}_2A_w
\end{bmatrix} . D^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
{}_1A_{11} & {}_1A_{12} & \cdots & {}_1A_{1w-1} & {}_1A_{1w} \\
{}_1A_{21} & {}_1A_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
{}_1A_{w1} & \cdots & \cdots & \cdots & {}_1A_{ww}
\end{bmatrix} . D^1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix}
{}_0A_{11} & {}_0A_{12} & \cdots & {}_0A_{1w-1} & {}_1A_{1w} \\
{}_0A_{21} & {}_0A_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
{}_0A_{w1} & \cdots & \cdots & \cdots & {}_0A_{ww}
\end{bmatrix} . D^0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

em linguagem matricial simbólica:

$$\underbrace{\underbrace{[\,{}_2A_{ij}\,]}_{(w,w)} \, D^2 \, \underbrace{[\,x_i\,]}_{(w,1)}}_{(w,1)} + \underbrace{\underbrace{[\,{}_1A_{ij}\,]}_{(w,w)} \, D^1 \, \underbrace{[\,x_i\,]}_{(w,1)}}_{(w,1)} + \underbrace{\underbrace{[\,{}_0A_{ij}\,]}_{(w,w)} \, D^0 \, \underbrace{[\,x_i\,]}_{(w,1)}}_{(w,1)} = 0 \tag{11}$$

$i,j = 1,2, \ldots w$

$[\,x_i\,]$ = matriz coluna

A equação (11) pode-se escrever ainda com a forma:

$$\sum_{l=o}^{2} [\,_{l}A_{ij}\,]\, D^{l}\, [\, x_{i}\,] = 0 \tag{12}$$

Admitindo agora que o estado do sistema em vibração poderá eventualmente depender de derivadas superiores à segunda, generaliza-se (12) para (13)

$$\sum_{l=o}^{n} [\,_{l}A_{ij}\,]\, D^{l}\, [\, x_{i}\,] = 0 \tag{13}$$

onde n será agora o grau máximo de todas as equações diferenciais.

Alarguemos mais ainda o problema e levantemos o condicionamento das forças exteriores serem nulas para passarem a poder ser quaisquer: Vamos considerar que estas forças exteriores podem aparecer de duas maneiras:

a) Forças reais exteriores que actuam sobre o sistema, que poderão ser uma força por cada grau de liberdade. Esta força que estamos a considerar por cada grau de liberdade poderá ser a resultante de um sistema de forças. Forças reais teremos então f_1, $f_2 \ldots f_i \ldots f_w$.

Quanto ao termo genérico f_i aparentemente tanto podia ser f_i como f_j pois tanto i como j variam entre 1 a w, porém como usamos o i para referenciar linhas e o j para referenciar colunas, e como a matriz da força exterior é uma matriz coluna, deve-se usar como termo genérico f_i.

b) Deslocamento das ligações do sistema em estudo. O número de ligações pode ser qualquer e não está ligado com o número de graus de liberdade. Sendo assim teremos y_o, $y_1 \ldots y_b \ldots y_a$ deslocamentos. Utilizamos y_b como termo genérico dos deslocamentos e a como o número total de deslocamentos das ligações que o sistema apresenta.

Igualmente ao que se passa para sistemas com um grau de liberdade, os deslocamentos das ligações podem ser resultantes de outras vibrações e sendo assim o parâmetro y_b variará da forma

$$\sum_{m=o}^{h} {}_{m}B_{b}\, D^{m}\, (y_{b}) \tag{14}$$

No final aparecerá para os deslocamentos das ligações uma equação semelhante a (13) que é

$$\sum_{m=o}^{h} [\,_{m}B_{ib}\,]\, D^{m}\, [\, y_{b}\,] \tag{15}$$

$$i = 1,2 \ldots w$$
$$b = 1,2 \ldots a$$

$[\,_{m}B_{ib}\,]$ é uma matriz com w linhas e a colunas.

A equação matricial que nos dá o estado de vibração de um sistema de w graus de liberdade, sujeito a w forças exteriores e com a ligações do sistema capazes de se deslocarem será:

$$\sum_{l=o}^{n} [\,_{l}A_{ij}\,]\, D^{l}\, [\, x_{i}\,] = \sum_{m=o}^{h} [\,_{m}B_{ib}\,]\, D^{m}\, [\, y_{b}\,] + [\, f_{i}\,] \tag{16}$$

que em notação matricial não simplificada se escreve:

$$\sum_{l=o}^{n} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1w-1} & A_{1w} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2w-1} & A_{2w} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ A_{w1} & A_{w2} & \cdots & A_{ww-1} & A_{ww} \end{bmatrix}_{(w,w)} \cdot D^l \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_w \end{bmatrix}_{(w,1)}}_{(w,1)} = \sum_{m=o}^{h} \underbrace{\begin{bmatrix} {}_mB_{11} & {}_mB_{12} & \cdots & {}_mB_{1a} \\ {}_mB_{21} & {}_mB_{22} & \cdots & {}_mB_{2a} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ {}_mB_{w1} & {}_mB_{w2} & \cdots & {}_mB_{wa} \end{bmatrix}_{(w,1)} \cdot D^m \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_a \end{bmatrix}_{(a,1)}}_{(w,1)} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_w \end{bmatrix}_{(w,1)} \tag{17}$$

Donde resultará no final um sistema de w equações.

Se quisermos ter em conta a natureza física dos elementos intervenientes e numa base contravariante, os deslocamentos são contravariantes e as forças covariantes. Teremos então para (16):

$$\sum_{l=o}^{n} [{}_lA_{ij}]\, D^l [x^i] = \sum_{m=o}^{h} [{}_mB_{ib}]\, D^m [y^b] + [f_i] \tag{18}$$

1.2.2 — Resolução do sistema

1.2.2.1 — Quanto às frequências próprias do sistema

A função homogénea de (18) é

$$\sum_{l=o}^{n} [{}_lA_{ij}]\, D^l [x^i] = o \tag{19}$$

Utilizemos para resolver o problema o espaço complexo.

Vamos oferecer como solução para x^i

$$x^i = a^i e^{pt} \text{ e então } [x^i] = [a^i]\, e^{pt} \text{ onde}$$

"p" é um número complexo
"a^i" é um número real e
$[a^i]$ é uma matriz coluna

Derivando $[x^i]$ obtemos:

$D^l [x^i] = [a^i] \cdot p^l \cdot e^{pt}$ que substituindo em (19) resulta:

$$\sum_{l=o}^{n} [{}_lA_{ij}]\, [p^l \cdot e^{pt} \cdot a^i] = 0$$

isto é igual a

$$\sum_{l=o}^{n} p^l e^{pt} [{}_lA_{ij}]\, [a^i] = o \tag{20}$$

Em linguagem matricial não simbólica (20) é:

$$e^{pt}\cdot\begin{bmatrix} {}_oA_{11} & \cdots & {}_oA_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_oA_{w1} & & {}_oA_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^w \end{bmatrix} + p.e^{pt}\cdot\begin{bmatrix} {}_1A_{11} & \cdots & {}_1A_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_1A_{w1} & \cdots & {}_1A_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^w \end{bmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + p^n.e^{pt}\cdot\begin{bmatrix} {}_nA_{11} & \cdots & {}_nA_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_nA_{w1} & \cdots & {}_nA_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^w \end{bmatrix} = 0 \qquad (21)$$

"e^{pt}" é um factor que aparece em todos os termos do somatório que sendo função do tempo pode tomar quaisquer valores diferentes de zero. Para se verificar (21) terá que se verificar (22)

$$\underbrace{\left[\begin{bmatrix} {}_oA_{11} & \cdots & {}_oA_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_oA_{w1} & \cdots & {}_oA_{ww} \end{bmatrix} + p.\begin{bmatrix} {}_1A_{11} & \cdots & {}_1A_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_1A_{w1} & \cdots & {}_1A_{ww} \end{bmatrix} + \cdots + p^n\begin{bmatrix} {}_nA_{11} & \cdots & {}_nA_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_nA_{w1} & \cdots & {}_nA_{ww} \end{bmatrix}\right]}_{[A]}\begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^w \end{bmatrix} = 0 \qquad (22)$$

Como também os a^i por princípio podem ser quaisquer diferentes de zero, para se verificar (22) terá que se verificar

$$[A] = 0$$

Ora a matriz [A] é uma forma de *n* matrizes:

$$[A] = \begin{bmatrix} {}_oA_{11} + \cdots + p^n.{}_nA_{11}, & {}_oA_{12} + \cdots + p^n.{}_nA_{12}, & \cdots, & {}_oA_{1w} + \cdots + p^n.{}_nA_{1w} \\ {}_oA_{21} + \cdots + p^n.{}_nA_{21}, & {}_oA_{22} + \cdots + p^n.{}_nA_{22}, & \cdots, & {}_oA_{2w} + \cdots + p^n.{}_nA_{ww} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \cdots \sum_{l=o}^{n} p.^lA_{ij} \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ {}_oA_{w1} + \cdots + p^n.{}_nA_{w1}, & {}_oA_{w.} + \cdots + p^n.{}_nA_{w2}, & \cdots, & {}_oA_{ww} + \cdots + p^n.{}_nA_{ww} \end{bmatrix} = 0 \qquad (23)$$

para esta matris ser igual a zero tem que se verificar

$$\det \left[\sum_{l=o}^{n} {}_l A_{ij} \, p^l \right] = 0$$

O que corresponde a dizer que o determinante da matriz [A] tem que ser nulo.
Este determinante só função de p, dá-nos as frequências próprias do sistema.

O grau do polinómio resultante em p é $n.w$.

1.2.2.2 — **Quanto ao valor de x^i**

Vamos ver como resolver o sistema (17)

— a) Vamos considerar que os deslocamentos das ligações " y^b " e as forças " f_i " são susceptíveis de decomposição em série harmónica.

— b) Consideremos também que um número finito de termos de cada uma das séries descreve com aproximação suficiente " f_i " e " y^b ".

— c) Sejam " s_q " as frequências correspondentes a todos os termos finitos considerados da série harmónica.

" q " varia de 1, 2, ... e

então $e^{Is_1 t}$ $e^{Is_2 t}$ ... $e^{Is_e t}$ são uma colecção de vectores girantes com várias frequências no espaço complexo.

— d) No espaço complexo, como admitimos que os deslocamentos são harmónicos, eles são susceptíveis de serem postos em função de $e^{Is_q t}$

Teremos:

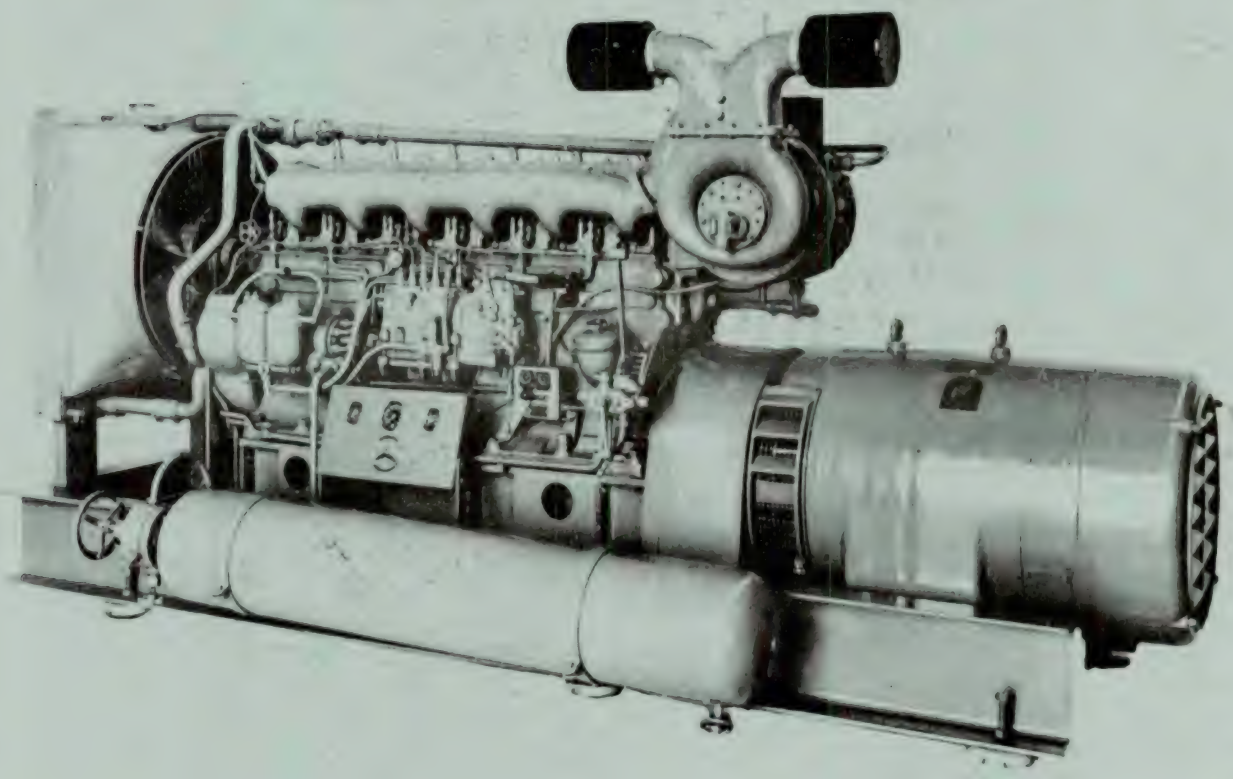
$$y^b = g_1^b \, e^{Is_1 t} + g_2^b \, e^{Is_2 t} + \ldots + g_e^b \, e^{Is_e t} \qquad \text{logo}$$

$$y^b = \left[\; g_1^b \;\; g_2^b \;\; \ldots \;\; g_e^b \; \right] \begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ e^{Is_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix} \qquad \text{donde}$$

$$\underset{(a,1)}{\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^a \end{bmatrix}} = \underset{(a,e)}{\begin{bmatrix} g_1^1 & g_2^1 & \cdot \cdot \cdot & g_e^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & \cdot \cdot \cdot & g_e^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ g_1^a & g_2^a & \cdot \cdot \cdot & g_e^a \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix}} \qquad (24)$$

MERCEDES-BENZ

MOTORES DIESEL



DE ALTA QUALIDADE E DE GRANDE RENDIMENTO PARA TODOS OS FINS

REPRESENTANTE:

MENDES DE ALMEIDA, SARL

OFICINAS ESPECIALIZADAS — ARMAZÉNS — STAND VENDAS

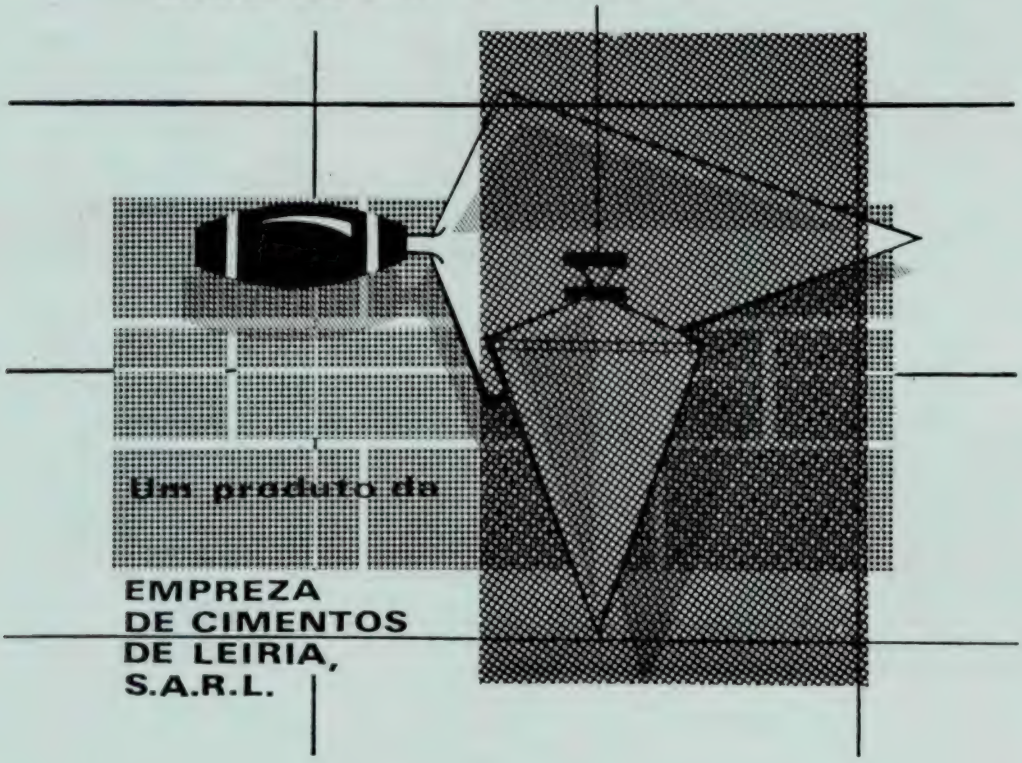
AV. 24 DE JULHO, 52-A-G — LISBOA — TELEF. 667710

CONTRA A HUMIDADE

CIMENTO

LIZ-N

HIDROFUGADO



em notação matricial simbólica:

$$[y^b] = [g_q^b][e^{Is_q t}] \tag{25}$$

os "g_q^b" são números que no caso geral são complexos isto para se poder fazer uma adaptação total de y^b com cada um dos vectores girantes. Sendo $g_q^b = \rho . e^{I\theta}$ permite uma homotetia e um desfazamento de y_b em relação aos vectores girantes.

— e) Em relação a "f_i", sendo harmónicos, podem igualmente ser ajustados aos vectores girantes e isto representar-se-á por

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1e} \\ p_{21} & p_{22} & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ p_{w1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{we} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ e^{Is_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix} \tag{26}$$

ou

$$\underset{(w,1)}{[f_i]} = \underset{(w,e)}{[p_{iq}]}\ \underset{(e,1)}{[e^{Is_q t}]} \tag{27}$$

pela mesma razão que os "g_q^b" também "p_{iq}" são complexos.
Determinemos $D^m[y^b]$ a partir de (25)

$$D^m[y^b] = [g_q^b][(I)^m . (s_q)^m . e^{Is_q t}] = [g_q^b][(s_q)^m . e^{Is_q t}] . (I)^m \tag{28}$$

A equação (18) pode-se escrever devido a (27) e (28):

$$\sum_{l=0}^{n} \underbrace{\underset{(w,w)}{\left[{}_lA_{ij}\right]} \underset{(w,1)}{D^l\left[x^i\right]}}_{(w,1)} = \sum_{m=0}^{h} \underbrace{\underset{(w,a)}{\left[{}_mB_{ib}\right]} \underbrace{\underset{(a,e)}{\left[g_q^b\right]} \underset{(e,1)}{\left[(S_q)^m . e^{Is_q t}\right]}}_{(a,1)}}_{(w,1)} . (I)^m + \underbrace{\underset{(w,e)}{\left[p_{iq}\right]} \underset{(e,1)}{\left[e^{Is_q t}\right]}}_{(w,1)} \tag{29}$$

Para achar os x^i vamos procurar a matriz $[Q_q^i]$ que relacione os x^i com os "$e^{Is_q t}$"

$$\underset{(w,1)}{\left[x^i\right]} = \underset{(w,e)}{\left[Q_q^i\right]} \underset{(e,1)}{\left[e^{Is_q t}\right]} \tag{30}$$

Como conhecemos os $e^{Is_q t}$, se conhecermos os termos da matriz $\left|Q_q^i\right|$ ficamos a conhecer x^i.
De (30) podemos ter $D^l[x^i]$ que é

$$D^l\left[x^i\right] = \left[Q_q^i\right]\left[(I)^l . (S_q)^l . e^{Is_q t}\right] = \left[Q_q^i\right]\left[(S_q)^l . e^{Is_q t}\right] . (I)^l \tag{31}$$

Substituindo (31) em (29) resulta

$$\sum_{l=0}^{n} \underset{(w,w)}{\left[{}_lA_{ij}\right]} \underset{(w,e)}{\left[Q_q^i\right]} \underset{(e,1)}{\left[(S_q)^l . e^{Is_q t}\right]} . (I)^l = \sum_{m=0}^{h} \underset{(w,a)}{\left[{}_mB_{ib}\right]} \underset{(a,e)}{\left[g_q^b\right]} \underset{(e,1)}{\left[(S_q)^m . e^{Is_q t}\right]} (I)^m + \underset{(w,e)}{\left[p_{iq}\right]} \underset{(e,1)}{\left[e^{Is_q t}\right]} \tag{32}$$

Não queremos deixar de chamar a atenção que $(I)^m$, $(I)^l$, $(S_q)^m$ e $(S_q)^l$ são potências e não notações simbólicas.

A equação (32) permite-nos procurar os valores do Q_q^i. Pela mesma razão que g_q^b e p_{iq}, também os termos da matriz $\left[Q_q^i\right]$ são complexos.

(32) pode ainda escrever-se da seguinte maneira:

$$\sum_{l=o}^{n} \underbrace{\underset{(w,w)}{\left[{}_lA_{ij}\right]} \underbrace{\underbrace{\left[Q_q^i \cdot (S_q)^l\right]}_{(w,e)} \underbrace{\left[e^{ls_q t}\right]}_{(e,1)}}_{(w,1)}}_{} \cdot (I)^l = \sum_{m=o}^{h} \underbrace{\underset{(w,a)}{\left[{}_mB_{ib}\right]} \underbrace{\underbrace{\left[g_q^b \cdot (S_q)^m\right]}_{(a,e)} \underbrace{\left[e^{ls_q t}\right]}_{(e,1)}}_{(a,1)}}_{(w,1)} \cdot (I)^m + \underbrace{\underbrace{\left[p_{iq}\right]}_{(w,e)} \underbrace{\left[e^{ls_q t}\right]}_{(e,1)}}_{(w,1)} \quad (33)$$

Em virtude da matriz $\left[e^{ls_q t}\right]$ ser constituída com termos que são exponenciais e comum a todos os termos dos somatórios da equação (33), 33) pode ser simplificado para:

$$\sum_{l=o}^{n} \underbrace{\underbrace{\left[{}_lA_{ij}\right]}_{(w,w)} \underbrace{\left[Q_q^i (S_q)^l\right]}_{(w,e)}}_{(w,e)} \cdot (I)^l = \sum_{m=o}^{h} \underbrace{\underbrace{\left[{}_mB_{ib}\right]}_{(w,a)} \underbrace{\left[g_q^b \cdot (S_q)^m\right]}_{(a,e)}}_{(w,e)} \cdot (I)^m + \underbrace{\left[p_{iq}\right]}_{(w,e)} \quad (34)$$

De (34) resultam we equações que são as mesmas que resultam se no sistema de w equações resultante de (33) tivermos em conta que nelas existem coeficientes referentes a vários $e^{"ls_q t"}$ que são em número de e. De cada uma das equações das w equações provenientes de (33) resultam e equações cada uma referente a um $e^{"ls_q t"}$

Se quisermos verificar isto com matrizes em notação não simplificada temos (32) igual a:

$$\sum_{l=o}^{n} \underset{(w,w)}{\begin{bmatrix} {}_lA_{11} & \cdots & {}_lA_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_lA_{w1} & \cdots & {}_lA_{ww} \end{bmatrix}} \underset{(w,e)}{\begin{bmatrix} Q_1^l & \cdots & Q_e^l \\ \vdots & & \vdots \\ Q_1^w & \cdots & Q_e^w \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} (s_1)^l \cdot e^{ls_1 t} \\ \vdots \\ (s_e)^l \cdot e^{ls_e t} \end{bmatrix}} \cdot (I)^l =$$

$$= \sum_{m=o}^{h} \underset{(w,a)}{\begin{bmatrix} {}_mB_{11} & \cdots & {}_mB_{1a} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_mB_{w1} & \cdots & {}_mB_{wa} \end{bmatrix}} \underset{(a,e)}{\begin{bmatrix} g_1^1 & \cdots & g_e^1 \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^a & \cdots & g_e^a \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} (s_1)^m \cdot e^{ls_1 t} \\ \vdots \\ (s_e)^m \cdot e^{ls_e t} \end{bmatrix}} \cdot (I)^m +$$

$$+ \underset{(w,e)}{\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{w1} & \cdots & p_{we} \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ \vdots \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix}} \tag{35}$$

E (35) é igual a (36). Como (36) é (33) então vê-se nesta notação a igualdade entre (32) e (33).

$$\sum_{l=o}^{n} \begin{bmatrix} {}_lA_{11} & \cdots & {}_lA_{1w} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_lA_{1w} & \cdots & {}_lA_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^1(s_1)^l, Q_2^1(s_2)^l & \cdots & , Q_e^1(s_e)^l \\ \vdots & & \vdots \\ Q_1^w(s_1)^l, Q_2^w(s_2)^l & \cdots & , Q_e^w(s_e)^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ \vdots \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix} \cdot (I)^l =$$

$$= \sum_{m=o}^{h}{}' \begin{bmatrix} {}_mB_{11} & \cdots & {}_mB_{1a} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_mB_{w1} & \cdots & {}_mB_{wa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^1(s_1)^m, g_2^1(s_2)^m & \cdots & , g_e^1(s_e)^m \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^a(s_1)^m, g_2^a(s_2)^m & \cdots & , g_e^a(s_e)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ \vdots \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix} \cdot (I)^m +$$

$$+ \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{w1} & \cdots & p_{we} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Is_1 t} \\ \vdots \\ e^{Is_e t} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Para se verificar a passagem de (33) para (34) vejamos que (36) é igual a (42). Para isso (36) é igual a (37).

$$\sum_{l=o}^{n} \underset{(w,e)}{\begin{bmatrix} {}_lM_{11} & \cdots & {}_lM_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_lM_{w1} & \cdots & {}_lM_{we} \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} {}_e Is_1^t \\ \vdots \\ {}_e Is_e^t \end{bmatrix}} (I)^l = \sum_{m=o}^{h} \underset{(w,e)}{\begin{bmatrix} {}_mN_{11} & \cdots & {}_mN_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_mN_{w1} & \cdots & {}_mN_{we} \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} {}_e Is_1^t \\ \vdots \\ {}_e Is^t \end{bmatrix}} \cdot (I)^m +$$

$$+ \underset{(w\,e)}{\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{w1} & \cdots & p_{we} \end{bmatrix}} \underset{(e,1)}{\begin{bmatrix} {}_e Is_1^t \\ \vdots \\ {}_e Is_e^t \end{bmatrix}} \tag{37}$$

onde:

$${}_lM_{11} = {}_lA_{11} Q_1^1 (s_1)^l + {}_lA_{12} Q_1^2 (s_1)^l + \cdots + {}_lA_{1w} Q_1^w (s_1)^l$$

etc.

Os termos genéricos são:

$${}_lM_{iq} = {}_lA_{i1} Q_q^1 (s_q)^l + {}_lA_{i2} Q_q^2 (s_q)^l + \cdots + {}_lA_{iw} Q_q^w (s_q) \tag{38}$$

$${}_mN_{iq} = {}_mB_{i1} g_q^1 (s_q)^m + {}_mB_{i2} g_q^2 (s_q)^m + \cdots + {}_mB_{in} g_q^n (s_q)^m \tag{39}$$

o sistema de w equações provenientes de (37) é

$$w \text{ equações} \begin{cases} {}_oM_{11}\, {}_e Is_1^t + \ldots + {}_oM_{1e}\, {}_e Is_e^t + \ldots + \overset{n}{I} \cdot {}_nM_{11}\, {}_e Is_1^t + \ldots + \overset{n}{I} \cdot {}_nM_{1e}\, {}_e Is_e^t = \\ \vdots \\ = {}_oN_{11}\, {}_e Is_1^t + \ldots + {}_oN_{1e}\, {}_e Is_e^t + \ldots + \overset{h}{I}\, {}_hN_{11} \cdot {}_e Is_1^t + \ldots + \overset{h}{I} \cdot {}_hN_{1e}\, {}_e Is_e^t + p_{11}\, {}_e Is_1^t + \ldots + p_{1e}\, {}_e Is_e^t \\ {}_oM_{w1}\, {}_e Is_1^t + \ldots + {}_oM_{we}\, {}_e Is_e^t + \ldots + \overset{n}{I} \cdot {}_nM_{w1}\, {}_e Is_1^t + \ldots + \overset{n}{I} \cdot {}_nM_{we}\, {}_e Is_e^t = \\ = {}_oN_{w1}\, {}_e Is_1^t + \ldots + {}_oN_{we}\, {}_e Is_e^t + \ldots + \overset{h}{I}\, {}_hN_{w1}\, {}_e Is_1^t + \ldots + \overset{h}{I}\, {}_hN_{we}\, {}_e Is_e^t + p_{w1}\, {}_e Is_1^t + \ldots + p_{we}\, {}_e Is_e^t \end{cases} \tag{40}$$

e de (40) resultam as $w.e$ equações

$$
w.e \text{ equações}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
{}_oM_{11} + I_1M_{11} + \ldots + I^n{}_nM_{11} = {}_oN_{11} + I_1N_{11} + \ldots + I^h{}_hN_{11} + p_{11} \\
\vdots \\
{}_oM_{1e} + I_1M_{1e} + \ldots + I^n{}_nM_{1e} = {}_oN_{1e} + I_1N_{1e} + \ldots + I^h{}_hN_{1e} + p_{1e}
\end{array}\right\} e \text{ equações} \\
\left.\begin{array}{l}
{}_oM_{21} + I_1M_{21} + \ldots + I^n{}_nM_{21} = {}_oN_{21} + I_1N_{21} + \ldots + I^h{}_hN_{21} + p_{21} \\
\vdots \\
{}_oM_{2e} + I_1M_{2e} + \ldots + I^n{}_nM_{2e} = {}_oN_{2e} + I_1N_{2e} + \ldots + I^h{}_hN_{2e} + p_{2e}
\end{array}\right\} e \text{ equações} \\
\vdots \\
\left.\begin{array}{l}
{}_oM_{w1} + I_1M_{w1} + \ldots + I^n{}_nM_{w1} = {}_oN_{w1} + I_1N_{w1} + \ldots + I^h{}_hN_{w1} + p_{w1} \\
\vdots \\
{}_oM_{we} + I_1M_{we} + \ldots + I^n{}_nM_{we} = {}_oN_{we} + I_1N_{we} + \ldots + I^h{}_hN_{we} + p_{we}
\end{array}\right\} e \text{ equações}
\end{array}\right. \quad (41)
$$

O sistema (41) é porém igual a

$$
\sum_{l=o}^{n}\begin{bmatrix} {}_lM_{11} & \cdots & {}_lM_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_lM_{w1} & \cdots & {}_lM_{we} \end{bmatrix} . (I)^l = \sum_{m=o}^{h}\begin{bmatrix} {}_mN_{11} & \cdots & {}_mN_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ {}_mN_{w1} & \cdots & {}_mN_{we} \end{bmatrix} . (I)^m + \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1e} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{w1} & \cdots & p_{we} \end{bmatrix} \quad (42)
$$

Tendo em conta a definição de "${}_lM_{iq}$" e "${}_mN_{iq}$" conclui-se que (42) é igual a (34). Podemos também concluir da igualdade entre (32) e (34).

Com a dupla demonstração da equação (34) tentou-se além de fazer uma verificação dessa própria equação, possibilitar o seguimento mais lento das várias passagens feitas e aumentar o contacto com essa equação, advindo daí uma sua melhor compreensão.

A equação (34) permite-nos achar os valores dos termos da matriz $[Q^i_q]$ pois nas $w.\ e$ equações que resultam só os Q^i_q não são conhecidos. Tendo os valores Q^i_q auxiliados por (30) tem-se $[x^i]$, estando então resolvido formalmente o problema que nos propusemos resolver.

Como complemento vejamos que como se disse $[Q^i_q]$ é uma matriz de termos imaginários, podendo então ser substituída por uma soma de outras duas matrizes:

$$
[Q^i_q] = [U^i_q] + I[V^i_q] \quad (43)
$$

onde $[U^i_q]$ e $[V^i_q]$ têm todos os seus termos reais
o mesmo se pode fazer para $[g^b_q]$ e $[p_{iq}]$

$$
[g^b_q] = [\beta^b_q] + I[\Theta^b_q] \text{ e} \quad (44)
$$

$$
[p_{iq}] = [\phi_{iq}] + I[\psi_{iq}] \quad (45)
$$

Usando (43), (44) e (45) em (34) resulta:

$$
\sum_{l=o}^{n}\underset{(w,w)}{\left[{}_lA_{ij}\right]}\underset{(w,e)}{\left[U^i_q(s_q)^l\right]}.(I)^l + \sum_{l=o}^{n}\underset{(w,w)}{\left[{}_lA_{ij}\right]}\underset{(w,e)}{\left[V^i_q.(s_q)^l\right]}.(I)^{l+1} = \sum_{m=o}^{h}\underset{(w,a)}{\left[{}_mB_{ib}\right]}\underset{(a,e)}{\left[\beta^b_q.(s_q)^m\right]}.(I)^m +
$$

$$
+ \sum_{m=o}^{h}\underset{(w,a)}{\left[{}_mB_{ib}\right]}\underset{(a,e)}{\left[\Theta^b_q.(s_q)^m\right]}.(I)^{m+1} + \underset{(w,e)}{\left[\phi_{iq}\right]} + I\underset{(w,e)}{\left[\psi_{iq}\right]} \quad (46)
$$

Desta única equação matricial tiram-se duas, uma englobando a parte real e outra a parte imaginária.

Na passagem para as equações (47) tenhamos em atenção que consoante l e m são pares ou ímpares assim vêm termos alternadamente reais e imaginários. Assim

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{\substack{l=o\\ l=\text{par}}}^{n}\left[{}_lA_{ij}\right]\left[U_q^i(s_q)^l\right](I)^l+\sum_{\substack{l=o\\ l=\text{impar}}}^{n}\left[{}_lA_{ij}\right]\left[V_q^i(s_q)^l\right](I)^{l+1}=\sum_{\substack{m=o\\ m=\text{par}}}^{h}\left[{}_mB_{ib}\right]\left[\beta_q^b(s_q)^m\right](I)^m+\\
&\qquad+\sum_{\substack{m=o\\ m=\text{impar}}}^{h}\left[{}_mB_{ib}\right]\left[\Theta_q^b(s_q)^m\right](I)^{m+1}+\phi_{iq}\\
&\sum_{\substack{l=o\\ l=\text{impar}}}^{n}\left[{}_lA_{ij}\right]\left[U_q^i(s_b)^l\right](I)^l+\sum_{\substack{l=o\\ l=\text{par}}}^{n}\left[{}_lA_{ij}\right]\left[V_q^i(s_q)^l\right](I)^{l+1}=\sum_{\substack{m=o\\ m=\text{impar}}}^{h}\left[{}_mB_{ib}\right]\left[\beta_q^b(s_q)^m\right](I)^m+\\
&\qquad+\sum_{\substack{m=o\\ m=\text{par}}}^{h}\left[{}_mB_{ib}\right]\left[\Theta_q^b(s_q)^m\right](I)^{m+1}+\psi_{iq}
\end{aligned}\right. \tag{47}$$

A primeira equação de (47) é a equação matricial real, e a segunda é a equação matricial imaginária.

Concluindo: quer (47) quer (34) resolvem o problema das equações diferenciais correspondentes a sistemas vibrantes com w graus de liberdade, desde que os deslocamentos das ligações e as forças exteriores sejam susceptíveis de decomposição em série harmónica.

2. — APLICAÇÃO

Tendo visto teòricamente como se poderão resolver sistemas vibrantes com w graus de liberdade, vamos fazer uma aplicação para o caso de $w = 2$.

Consideremos o sistema vibrante da figura 2 e estudemo-lo para os dados apresentados.

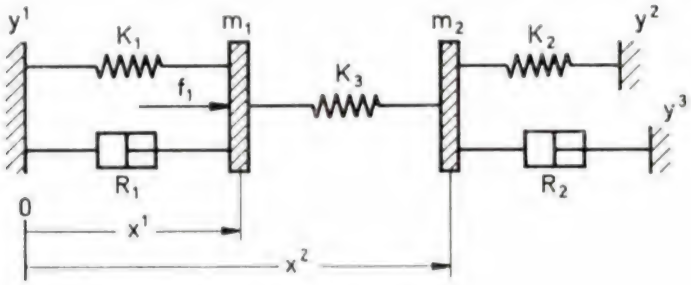


Fig. 2

Dados:

$K_1 = 10$ kg/cm
$K_2 = 5$ kg/cm
$K_3 = 20$ kg/cm
$R_1 = 1$ kg seg/cm
$R_2 = 2$ kg seg/cm
$m_1 = 2$ kg seg^2/cm
$m_2 = 1$ kg seg^2/cm
$f_1 = 50 \cos wt + 10 \operatorname{sen} 4\,wt$ kg
$y^1 = 3 \cos wt + 2 \cos 2\,wt + \operatorname{sen} 3\,wt$ cm
$y^2 = 2 \cos 2\,wt$ cm
$y^3 = 1{,}5 \operatorname{sen} wt + \cos 2\,wt$ cm
$w = \pi$ rad/seg

As forças e os deslocamentos dos apoios estão já sob a forma de funções harmónicas. As equações que regem o movimento deste sistema são:

$$\begin{cases} -m_1 \dfrac{d^2 x^1}{dt^2} = K_1 (x^1 - y^1) + R_1 \left(\dfrac{dx^1}{dt} - \dfrac{dy^1}{dt} \right) + K_3 (x^1 - x^2) - f_1 \\ -m_2 \dfrac{d^2 x^2}{dt^2} = K_2 (x^2 - y^2) + R_2 \left(\dfrac{dx^2}{dt} - \dfrac{dy^3}{dt} \right) + K_3 (x^2 - x^1) \end{cases} \tag{48}$$

Em notação matricial (48) pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} D^2 \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} D^1 \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_3 & -K_3 \\ -K_3 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} D^0 \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} D^1 \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \end{bmatrix} D^0 \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Esta equação matricial corresponde no desenvolvimento teórico à equação (17). Ficamos assim sabendo os elementos das matrizes $[{}_{l}A_{ij}]$ e $[{}_{m}B_{ib}]$.

As frequências dos vectores girantes necessários para descrever completamente o fenómeno são

$$w = \pi \text{ rad/seg}, \quad 2\pi, \quad 3\pi \quad \text{e} \quad 4\pi$$

Correspondentes às equações (24) e (26) teremos assim:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & e^{-1\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1{,}5 . e^{-1\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1\pi t} \\ e^{12\pi t} \\ e^{13\pi t} \\ e^{14\pi t} \end{bmatrix} \tag{50}$$

e

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 10 . e^{-1\frac{\pi}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{1\pi t} \\ e^{12\pi t} \\ e^{13\pi t} \\ e^{14\pi t} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Ficamos a saber os elementos das matrizes $[g_q^b]$ e $[p_{iq}]$.

Façamos:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 & Q_3^1 & Q_4^1 \\ Q_1^2 & Q_2^2 & Q_3^2 & Q_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} \tag{52}$$

que é equivalente à equação (30) e assim podemos escrever a equação correspondente a (36):

$$\begin{aligned}
&-\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^1 \pi^2 & Q_2^1 (2\pi)^2 & Q_3^1 (3\pi)^2 & Q_4^1 (4\pi)^2 \\ Q_1^2 \pi^2 & Q_2^2 (2\pi)^2 & Q_3^2 (3\pi)^2 & Q_4^2 (4\pi)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} + \\
&+ I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^1 \pi & Q_2^1 2\pi & Q_3^1 3\pi & Q_4^1 4\pi \\ Q_1^2 \pi & Q_2^2 2\pi & Q_3^2 3\pi & Q_4^2 4\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^1 & Q_2^1 & Q_3^1 & Q_4^1 \\ Q_1^2 & Q_2^2 & Q_3^2 & Q_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} =
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&= I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\pi & 4\pi & -3\pi I & 0 \\ 0 & 4\pi & 0 & 0 \\ -1{,}5\pi I & 2\pi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -I & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1{,}5 I & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & -10 I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

PRISMA

ARMADURAS
PRÉ-FABRICADAS
EM TODOS
OS TIPOS DE AÇO
PARA BETÃO

AÇO A 24
AÇO A 40
AÇO A 50
AÇO A 68

PRISMA - Armaduras para Betão, SARL
Rua D. Luís I, 20 — LISBOA 2
Telef. 67 01 76

Oficina e Laboratórios
do
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDES, de INSTRUMENTOS DE PRECISAO, de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA - ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

IMPERMEABILIZAÇÕES
TORNA TUDO
ESTANQUE

RUBIO

FLUIDO MASTIC
Impermeabilização e vedação perfeita de:
Terraços, Empenas, Algerozes, Claraboias, Paredes húmidas, Coberturas, Fendas, Juntas de dilatação, etc. etc.
Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX À BASE DE Borracha + Alumínio

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão.

RUBIO E ROOFATEX
DOIS PRODUTOS QUE SE COMPLETAM

DEPOSITÁRIOS: LARGO DR. ANTÓNIO DE SOUSA MACEDO, 2 | | **PILOTO & SANTOS, LDA.** TELEF. 67 88 67 LISBOA-2

Representante Exclusivo: ORF *Orlando Fernandes*
RUA PALMIRA, 46-A, B, C - LISBOA-1
TELEFS. 83 01 63 - 84 26 39 - END. TELEG. «ORFER»

15 HIDREL

TÉCNICA DE HIDRÁULICA
E DE ELECTRICIDADE, LDA.

Grupos moto e electro-bomba
Grupos electro-bomba submersíveis
Grupos de eixo vertical «JOHNSTON»
Contadores para líquidos «LANGE»
Aparelhagem de medida «METRIMPEX»
Motores Eléctricos
Hidro-injectores
Válvulas e torneiras
Manómetros e Vacuómetros «HAENNI»
Rega por aspersão

ASSISTÊNCIA TÉCNICA
Rua do Alecrim, 47-A-B — Rua do Lumiar, 113
Telefs. 32 57 00 - 3 59 66 LISBOA Telef. 79 03 55

ESCAVADORAS HIDRÁULICAS
S/RODAS — S/LAGARTAS

yumbo

— ENTREGAS IMEDIATAS

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA, LDA.

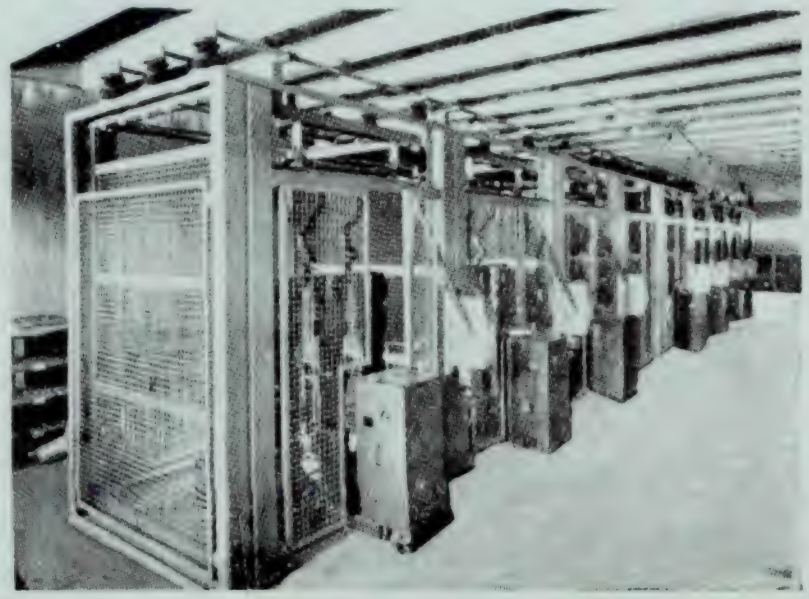
RUA ÁUREA, 181 - 2.° — TELEFONES 32 50 11 - 32 78 45 — LISBOA

ISOLUX L.DA

ESTUDOS E INSTALAÇÕES ELÉCTRICAS

Porto
R. Dr. Alfredo Magalhães, 110 - 2º. Dtº.
Tel. 20723

Lisboa
L. Campo Pequeno, 21 - 4º Esq
Tel. 77 00 30/8/9



CELAS ABERTAS DE ALTA TENSÃO

Projectos e instalações eléctricas de:

Centrais

Subestações

Postos de Transformação

Fábricas

Edifícios públicos

Blocos residenciais

Daqui resulta o sistema de equações (53) que é o que corresponde às equações (41)

$$\begin{cases} -2\pi^2 Q_1^1 + I\pi Q_1^1 + 30 Q_1^1 - 20 Q_1^2 = I\,3\pi + 80 \\ -8\pi^2 Q_2^1 + I\,2\pi Q_2^1 + 30 Q_2^1 - 20 Q_2^2 = I\,4\pi + 20 \\ -18\pi^2 Q_3^1 + I\,3\pi Q_3^1 + 30 Q_3^1 - 20 Q_3^2 = -I\,10 + 3\pi \\ -32\pi^2 Q_4^1 + I\,4\pi Q_4^1 + 30 Q_4^1 - 20 Q_4^2 = -I\,10 \\ -\pi^2 Q_1^2 + I\,2\pi Q_1^2 - 20 Q_1^1 + 25 Q_1^2 = 3\pi \\ -4\pi^2 Q_2^2 + I\,4\pi Q_2^2 - 20 Q_2^1 + 25 Q_2^2 = I\,4\pi + 40 \\ -9\pi^2 Q_3^2 + I\,6\pi Q_3^2 - 20 Q_3^1 + 25 Q_3^2 = 0 \\ -16\pi^2 Q_4^2 + I\,8\pi Q_4^2 - 20 Q_4^1 + 25 Q_4^2 = 0 \end{cases} \tag{53}$$

A solução deste sistema é:

$$\begin{aligned} Q_1^1 &= -3{,}44 - I.\,3{,}93 & Q_3^1 &= -0{,}0723 + I.\,0{,}0658 \\ Q_1^2 &= -5{,}15 - I.\,3{,}02 & Q_3^2 &= +0{,}0264 - I.\,0{,}0128 \\ Q_2^1 &= -0{,}268 + I.\,0{,}581 & Q_4^1 &= -0{,}00161 + I.\,0{,}0361 \\ Q_2^2 &= +1{,}12 - I.\,1{,}94 & Q_4^2 &= -0{,}00122 - I.\,0{,}0051 \end{aligned} \tag{54}$$

Podemos assim escrever 52):

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}22.\,e^{I\,1{,}27\pi} & 0{,}638.\,e^{I\,0{,}637\pi} & 0{,}0978.\,e^{I\,0{,}814\pi} & 0{,}0365.\,e^{I\,0{,}631\pi} \\ 5{,}98.\,e^{I\,1{,}17\pi} & 2{,}24.\,e^{-I\,0{,}333\pi} & 0{,}0293.\,e^{-I\,0{,}142\pi} & 0{,}00646.\,e^{-I\,0{,}427\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{I\pi t} \\ e^{I2\pi t} \\ e^{I3\pi t} \\ e^{I4\pi t} \end{bmatrix} \tag{55}$$

Daqui se conclui que

$$\begin{cases} x^1 = 5{,}22\cos(\pi t + 1{,}27\pi) + 0{,}638\cos(2\pi t + 0{,}637\pi) + 0{,}0978\cos(3\pi t + 0{,}814\pi) + \\ \qquad + 0{,}0365\cos(4\pi t + 0{,}631\pi) \\ x^2 = 5{,}98\cos(\pi t + 1{,}17\pi) + 2{,}24\cos(2\pi t - 0{,}333\pi) + 0{,}0293\cos(3\pi t - 0{,}142\pi) + \\ \qquad + 0{,}00646\cos(4\pi t - 0{,}427\pi) \end{cases} \tag{56}$$

A equação que dá as frequências (cm) próprias é

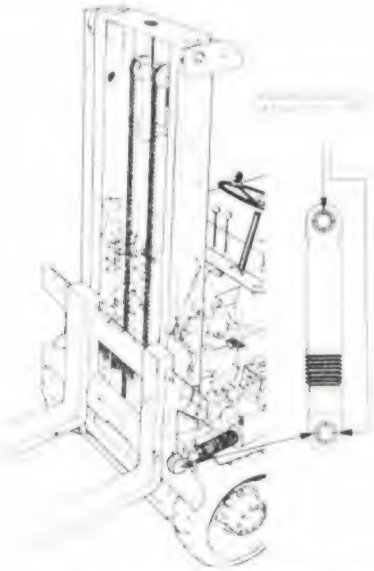
$$2p^4 + 5p^3 + 82p^2 + 85p + 350 = 0$$

Ao terminar não queremos deixar de frizar que para um maior número de graus de liberdade ou para desenvolvimentos harmónicos com grande número de termos o recurso ao computador é obsolutamente necessário.

DO MUNDO TÉCNICO

APOIOS NÃO LUBRIFICADOS EM MATERIAL PLÁSTICO (TEFLON)

Uma empresa construtora de aparelhagem de elevação (monta-cargas) aplicou apoios de material plástico não lubrificado em algumas das suas máquinas recentemente construídas. Os referidos apoios situam-se em ambos os extremos do elevador, localizados por cima do eixo de accionamento na próximidade do fundo. Por este facto estão sujeitos a impurezas causadas pela humidade e sob a acção de sem número de agentes abrasivos que chegam do fundo.



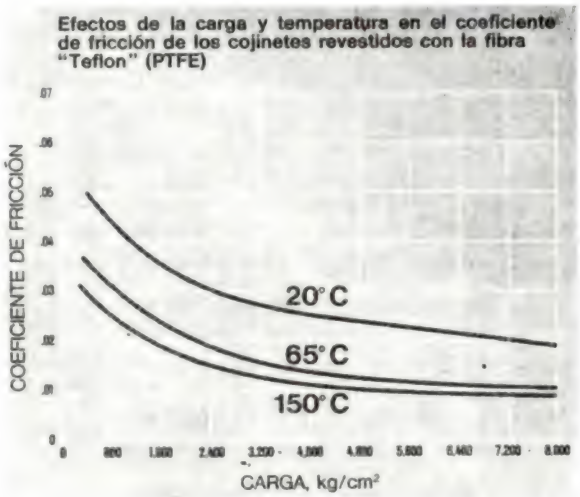
A lubrificação é, pois, difícil atendendo à posição dos elevadores. O revestimento aplicado dispensa-a e tem portanto a vantagem de eliminar esses pontos de lubrificação, podendo os elevadores manter-se como unidades estanques.

As características da fibra utilizada (TEFLON) são as seguintes:

Densidade g/cm³	2,1
Máxima resistência à tracção (Kg/cm²) . . .	2.460
Alongamento de rotura (%)	25
Módulo inicial (Kg/cm²)	24.600
Capacidade de carga do apoio sem fluxo a frio (Kg/cm²)	4.200

O coeficiente de atrito desta fibra é o mais baixo de todos os materiais plásticos conhecidos e diminui à medida que aumenta a carga ou a temperatura ao contrário do que sucede com os apoios metálicos lubrificados, em que a própria expulsão do lubrificante constitui problema.

A variação do coeficiente de atrito com a carga e a temperatura para apoios revestidos com esta fibra, é a que se mostra no gráfico seguinte:



Os ensaios realizados pela empresa construtora de máquinas que aplicou esta fibra, demonstraram que os apoios revestidos com esta fibra são superiores a outros de desenho semelhante, embora o seu preço seja mais competidor.

Inf. Ampep Industrial Products Ltd

"DIGITATRON": NOVO ACESSÓRIO DE PERIFÉRICOS DE COMPUTADORES

O "Digitatron" é um dispositivo óptico, acessório aos periféricos de computadores com écran de tubo de raios catódicos. Permite o diálogo Homem-máquina pela simples indicação com o dedo da informação seleccionado. É formado por um quadrado, fixado na face exterior do écran, que na versão standard, é varrido por 11 feixes horizontais distanciados 18 ou 24 mm. As fontes luminosas e as células fotoeléctricas dispõem-se alternadamente, nas quatro faces internas do quadrado.

A indicação com o dedo dum grupo de informações afixadas no écran corta um feixe vertical e outro horizontal, sendo a detecção das duas interrupções transmitidas ao computador numa mensagem definidora das coordenadas do ponto indicado.

O "Digitatron" pela rapidez de execução e pela simplicidade de emprego, permite a actual aplicação no control e regularização do tráfego aéreo dentro das condições de segurança exigidas, permitindo desde já devisar outras aplicações tais como:

- interrogação de ficheiro do tipo "piramidal" (passagem progressiva de questões gerais a mais particulares específicas);
- control de instalações e processos industriais;
- simulação de manobras;
- ensino programado.

Inf. Société OMER/SEGID

Resumo dos artigos publicados na Técnica n.º 393

Ano XLIV — Dezembro 1969

Carvalho Fernandes C. D. U. 621.375.13 621.373.421

Realimentação em sistemas electrónicos lineares

Técnica No. 393 — XLIV — 12. 1969, pág. 105-125.

Utilizando o Cálculo Operacional com base na Transformação de Laplace e a Teoria das Funções de Variável Complexa, apresenta-se neste artigo, a teoria da Realimentação em Sistemas Lineares e a sua aplicação a Sistemas Electrónicos. Tratam-se em pormenor as configurações típicas de Amplificadores e Osciladores com Realimentação e estudam-se exemplos concretos. Apresentam-se e justificam-se, com generalidade, os critérios de estabilidade em sistemas com realimentação, com referência especial aos critérios de Routh e Nyquist.

Gomes Durão C. D. U. 517.91 : 534.1

Resolução das equações diferenciais correspondentes a sistemas vibrantes com w graus de liberdade

Técnica No. 393 — XLIV — 12. 1969, pág. 147-162.

Apresenta-se a maneira de resolver equações diferenciais referentes a sistemas vibrantes com w graus de liberdade. As forças e os deslocamentos têm de ser desenvolvidos em séries harmónicas.
Para facilitar a compreensão da exposição são usadas diferentes notações.
No final faz-se a aplicação da teoria desenvolvida a um caso particular com 2 graus de liberdade.

Alexandre Cerveira
Fonseca de Moura
Pombo Duarte C. D. U. 621.391.812.6:62.001.57

Canal binário afectado por ruído intermitente. Análise de um modelo.

Técnica No. 393 — XLIV — 12. 1969, pág. 127-146.

Para estudar o funcionamento de um modelo de comunicação binária em presença de ruído intermitente começa-se por fazer uma descrição pormenorizada do sistema e das transformações que o sinal sofre no seu trânsito. Após a concretização do modelo procedeu-se ao cálculo da probabilidade de transmissão de um certo conjunto de mensagens sem erro, quer através do método analítico, quer através do método de Monte Carlo.

Synopsis of articles published in «Técnica» nº 393

XLIV — December 1969

Gomes Durão U. D. C. 517.91 : 534.1

Resolution of differential equation applied to vibrating systems with w degrees of freedom

Técnica no. 393 — XLIV — 12. 1969, pp. 147-162.

A way of solving differential equations applied to vibrating systems with w degrees of freedom is presented. Forces and displacements are discribed in harmonic series.
To make easy the comprehension fo the exposition, different notations are used.
At the end it is made a application of the developed theory to a particular case with two degrees of freedom.

Carvalho Fernandes U. D. C. 621.375.13 621.373.421

The linear feedback theory in electronic systems

Técnica No. 393 — XLIV — 12. 1969, pp. 105-125.

The Linear Feedback Theory and its applications to Electronic Systems is presented in this paper, making use of the Operational Calculus (based on the Laplace Transformation) and of the Theory of Functions of Complex Variable. Typical feedback circuit configurations in amplifiers and oscillators and pratical examples are dealt with in detail. The theoretical justification for the stability criteria in Linear feedback systems is given with generality. Special reference is made to the Routh and the Nyquist criteria.

Alexandre Cerveira
Fonseca de Moura
Pombo Duarte U. D. C. 621.391.812.6:62.001.57

Binary communication in presence of burst noise analysy of model

Técnica No. 393 — XLIV — 12. 1969, pp. 127-146.

This paper studies the performance of a model of binary communication in presence of burst noise. It begins with a complete description of the system and of the signal transformations. Assuming specifications for the model it is possible to evaluate the probability of correct transmission of a given set of messages. This evaluation is done by analytic methods and by Monte Carlo method.

BIBLIOGRAFIA

Classificadores responsáveis: Geraldo Fernandes, José Oliveira Paulo, Pedro Martins e Raul Pereira da Costa.

Serão criticadas as obras cujo assunto esteja no âmbito da «Técnica» e de que nos sejam enviados dois exemplares.

As revistas recebidas na Redacção, de que se publica uma selecção de fichas de artigos ordenadas pela Classificação Decimal Universal, podem ser consultadas na Biblioteca da A.E.I.S.T.

ARTIGOS DE REVISTAS

C. D. U. 001.8 : 646.9 : 621.643

Método para detectar perdidas en cañerias subterraneas

Ingenieria e Industria, 7-69, n.º 407, págs. 60 a 62.

Explica-se o funcionamento de um novo detector de fugas em canalizações subterrâneas. O processo foi desenvolvido por Doyle Chandler e usa um detector ultrasónico portátil que consta de uma sonda que recebe os sinais ultrasónicos e um amplificador electrónico. A fuga é localizada por um ruído característico.

Pode usar-se com o fluido estático ou em movimento.

C. D. U. 002.6(469-5)

O centro de documentação técnico-económica—*Tavares, J. F. C.*

Fomento (Lisboa) 7 (3) : 159-163, 1969.

Depois de se referir como surgiu a necessidade de apoio ao Ultramar em matéria de documentação técnica, dá-se uma ideia da solução adoptada para o alargamento da sua actividade ao domínio da economia. Descreve-se a organização e o funcionamento do Centro de Documentação Técnico-Económica e como se encontra planeada a respectiva rede de informação de modo a ser dado apoio eficaz aos diversos centros já existentes ou a criar no Ultramar.

C. D. U. 542-232

Porcelaines électrotechniques Séchage des futs de grandes dimensions — *G. Lorphevre.*

Ind. Chim. Belge, 34, 11, 11-69, vol. 34, n. 11, pág. 974-976.

C. D. U. 542.953.4

Synthése, propriétés et applications de bases de schiff — *J. Fastrez.*

Industrie Chimique Belge, 10-69, vol. 34, n.º 10, págs. 835-848.

Principais tipos de síntese, dados novos sobre a configuração e as grandes linhas do problema da estabilidade dos seus derivados em face da hidrólise.

C. D. U. 545.33 : 543-25

Polarography in the solution of problems of organic chemistry — *P. Zuman.*

Cronache di Chimica, 9-68, n.º 21, Págs. 6 12.

Descrevem-se as técnicas empregadas no estudo dos processos orgânicos de eléctrodo e demonstra-se a aplicação das mesmas nas electro-reduções de compostos orgânicos, como os compostos carbonílicos; semicarbazonas; benzonitrilos; sulfonas; derivados peridoxálicos, etc. Discutem-se exemplos de mecanismo das reacções orgânicas estudadas polarogràficamente (p. ex., eliminação das bases de Mannich, hidratação das cetonas insaluradas, etc.).

C. D. U. 547.91

Hydrogenation of edible oils — *C. P. Gerhardt.*

Industrie Chimique Belge, 12-69, vol. 34, n.º 12 pág. 1083.

C. D. U. 552.52 (673)
C. D. U. 553.492 (673)

Alterites intertropicais e as possibilidades da existência de jazigos de alumínio na província de Angola — *Carvalho, G. S.*

Fomento (Lisboa) 7 (3): 213-230, 1969.

Breve referência às razões porque as alterites das rochas interessam aos engenheiros civis e aos geólogos e à necessidade de fazer a análise dos complexos de meteorização a partir de cada uma das unidades que os constituem. Exposição sobre a diferença entre couraças ferralíticas aluminosas (rochas resultantes da evolução de complexos de meteorização ferralítica) e bauxites (rochas sedimentares aluminosas) destinada à interpretação da génese e evolução das couraças das superfícies de aplanamento dos arredores de Sá da Bandeira. A partir de algumas observações sobre as

SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES AMADEU GAUDÊNCIO

ESCRITÓRIO E OFICINAS R. ALEXANDRE BRAGA, 4-A LISBOA

ARQUITECTURA E ENGENHARIA

CONSTRUÇÕES CIVIS

•

BETÃO ARMADO E PRE-ESFORÇADO

•

CARPINTARIA MECÂNICA

•

TRABALHOS DE PINTURA E ESTUQUES

Telefones:

P. P. C. A. 56 00 51

End. Telegráfico: «CONSTRUÇÃO»

DEPÓSITO DE MATERIAIS:

Estrada de Moscavide, 17-19

Telefone 31 20 00

LISBOA

Endereço no PORTO

Rua Casal do Pedro, 7 (Massarelos) Telefone: 69 12 45

TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

A APARECER BREVEMENTE

PEDIDOS À

técnica

EMPRESA ELECTRO CERÂMICA

S. A. R. L.

FABRICANTE DE ISOLADORES PARA EQUIPAMENTO DE SUB-ESTAÇÕES TRANSFORMADORES E DE LINHAS DE TRANSPORTE DE ENERGIA EM ALTA TENSÃO

fabrica igualmente,

- isoladores de baixa tensão
- pequena aparelhagem eléctrica em bequelite e porcelana
- tubo plástico "Polivoli" para protecção de condutores
- material em refractário especial para aparelhos de aquecimento

DANIEL VIDAS

SEDE L. BARÃO DE QUINTELA 3-1 LISBOA

FABRICA-CANDAL-VILA NOVA DE GAIA

EC 61·1

novidades rotring

O rebitógrafo rotring

é o primeiro que trabalha com ponteiras de tinta-da-china. A construção particularmente feliz do porta-ponteiras permite uma distribuição equilibrada do peso de ambos os lados do eixo de rotação, facultando assim à ponta que desenha um movimento regular e suave em torno do centro de gravidade. O círculo mais pequeno que se pode fazer tem 0,7 mm de diâmetro exterior. Ref. 1606

Jogo combinado VARIANT/compasso para técnicos, em estojo de metal revestido. Ref. 1199

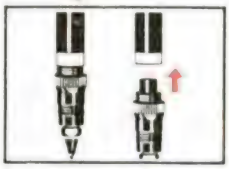
lapiseira de desenho rotring

Mais um produto da técnica avançada rOtring, com freio regulável, pinça de precisão de 4 garras e centro de gravidade situado na ponta. Ref. 1305

enchimento extra-rápido com cartuchos rotring de tinta-da-china

Cómoda, segura e rápida é a manipulação dos novos cartuchos rOtring, que servem nos sistemas rOtring VARIANT e VARIOSCRIPT Pode escolher entre 6 cores diferentes de tinta-da-china rOtring

Os cartuchos rOtring transformam imediatamente os sistemas rOtring de tinta-da-china numa caneta de cartucho.



Tirar o depósito da parte dianteira, introduzir o cartucho até à rosca (há uma leve resistência)

Enroscar a ponteira no cabo - é tudo!

Pode colocar um segundo cartucho como reserva, encaixa no primeiro e há espaço suficiente no cabo

aparos para escantilhões rotring

Estes aparos só têm duas partes, pelo que a sua manutenção é mais simples. Inclinação sempre adequada. O orifício de enchimento, e/ou de respiração, nunca fica tapado. Um apoio prático permite pousar o aparo nos intervalos do trabalho. Para letras com alturas de 1,4 - 20 mm.

À venda nas casas da especialidade.

couraças daquelas superfícies apontam-se factos, uns favoráveis e outros desfavoráveis à existência de jazigos de alumínio, do tipo couraça ferralítica, na Província de Angola. Como conclusão final sugere-se que as investigações futuras, no que se referem às possibilidades de jazigos de alumínio, devem incidir particularmente sobre o Planalto Principal, com o fim de localizar afloramentos de couraças ferralíticas, sobretudo nas zonas em que afloram rochas básicas e que revelem uma rede de drenagem profunda e bem desenvolvida. Simultâneamente procurar-se-ia encarar os problemas mineralógicos das alterites, incluindo todos os tipos de couraças e formações delas derivadas, com o fim não só de resolver os seus problemas de natureza geológica, mas também para explicar as suas propriedades mecânicas que interessem aos problemas com que se preocupam os engenheiros civis.

C. D. U. 565.1

O ciclo hidrológico e o balanço energético da atmosfera — *Peixoto, J. P.*

Fomento (Lisboa) 7 (3): 255-262, 1969.

A natureza, o estabelecimento, a manutenção e a estrutura do ciclo hidrológico resultam das propriedades físicas intrínsecas da água e são condicionados pelos factores do ciclo dos quais se destacam a energia radiante, solar e terrestre, a energia associada às transições de fase e as circulações gerais da atmosfera e dos oceanos. Neste artigo analisa-se em primeiro lugar a disposição das energias radiante de origem solar e terrestre e descrevem-se os vários acidentes da sua propagação. Passa-se em revista o balanço energético do sistema globo-atmosfera e estudam-se as suas implicações no ciclo hidrológico. Como aplicação a uma região limitada apresenta-se o fundamento do método do balanço energético para o cálculo da evaporação. Associa-se o balanço energético à geração de energia potencial utilizável que se transforma em energia cinética, estabelecendo assim as circulações da atmosfera e dos oceanos. A atmosfera funciona portanto como uma máquina térmica que produz energia cinética a partir da energia potencial, que por sua vez resulta do estabelecimento do balanço energético do sistema globo-atmosfera. As circulações assim estabelecidas transportam a água na fase de vapor e nas fases sólida e líquida (núvens), dando origem ao ramo aéreo do ciclo hidrologico. Por outro lado a circulação da atmosfera estabelece um regime forçado de movimento sobre os oceanos originando correntes marítimas, parte importante no ramo terrestre do ciclo hidrológico.

C. D. U. 621.311.2

Central Térmica do Carregado — Descrição dos dois Turbo-grupos de 125 MW — *G. Spissu e G. Knech.*

Electricidade, 11-12-69, n.º 62, pág. 405-419.

Introdução. Caracteristicas principais. Fluxo de Vapor e esquema térmico. Turbinas. Instalação de condensação e de preaquecimento. Turbo-alternador. Excitação dos turbo-alternadores. Regulador eléctrico da turbina. Protecções das turbinas. Fundações em Y.

C. D. U. 621.311.23 : 621.438(62)

La Centrale à turbines à gaz de 21 MW D'Abou Zeniema, Sinai (R. A. U.) — *James Walter.*

Rev. Brown Boveri, 967, vol. 54, n.º 1, pág. 9 a 16.

O autor dá uma descrição da central e da instalação de destilação cujo estudo e construção foram confiados à sociedade Brown Boveri na qualidade de empreiteiro geral.

C. D. U. 621.313.12

Algunas consideraciones sobre la elección de generadores de corriente alterna — *Luis Odrizola Arteaga.*

Anales de Mecanica y Electricidade, 9-10-1969 vol. XLVI, n.º 5, pág. 379-388.

O autor analisa detalhadamente o problema sob o ponto de vista da carga e da máquina de accionamento do alternador.

C. D. U. 621.313.36

Les moteurs à collecteur type A — *Ménard. P.*

ASEA - Revue, 969, vol. 41, n.º 5, pág. 103-106.

O artigo dá duma maneira muito geral, as bases técnicas sobre as quais é fundamentado o funcionamento dos motores com colector, sistema Schnage. Refere-se às diferentes aplicações possíveis destas máquinas e dá exemplos concretos de utilização. Vantagens técnicas e económicas.

C. D. U. 621.315.051

Transmissão de corrente contínua à ilha de Vancouver — *Duhh, G. H. Bergström, L. A.*

Asea-Revue 1969, 969, vol. 41, n.º 4, pág. 75-77.

Descrição da transmissão de corrente contínua que liga a ilha de Vancouver ao continente canadiano. No primeiro estádio, a transmissão tem uma capacidade de 78 MW e no estádio final e o que quer dizer que até ao fim de 1969, a capacidade atingirá 312 MW.

C. D. U. 621.316.54

La série de disjoncteurs type T, un programme complet de disjoncteurs à taile volume d'huile — *Jährig, S.; Strangl. E.*

Siemens, 969, n.º 8, pág. 267-270.

Graças ao novo princípio de um disjuntor tipo T, foi possível realizar um programa completo de aparelhos até 30 KV, 1500 MVA e 4000 A. O artigo descreve as bases de estudo aplicadas para os polos e os comandos dos disjuntores.

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS

à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATE 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO, L.DA

P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

C. D. U. 621 316.54 067.9

Nouveaux disjoncteurs SF avec commande électro-hydraulique — *Ann, H.; Noak, D.*

Rev. Siemens 27, 969, n.° 8, pág. 263-266.

O equipamento dos disjuntores Siemens, tipo F, com o comando electro-hidráulico novamente ajustado, permite realizar postos de comando utilizando sòmente os comandos eléctricos. Os aperfeiçoamentos dos conjuntos de rotura para as tensões e correntes de rotura mais elevadas conduziram à redução do número de câmaras de rotura para o mesmo poder de rotura. Hoje, a Siemens dispõe dum programa completo de disjuntores para todas as sèries de tensões internacionais.

C. D.U . 621.316.925.2

Protecção diferencial transistorizado para transformadores — *Hossbo, B.*

ASEA-Revue, 969, vol. 4, n.° 4, pág. 85-90.

Descrição da protecção diferencial para transformadores tipo RYDSA 20, com componentes estáticos. O artigo mostra como são compostos os circuitos estabilizadores e o circuito de medida, e a maneira como é realizada a protecção que compreende duas execuções diferentes, o que quer dizer, para transformadores com dois ou três enrolamentos.

C. D. U. 621.317.2

École technique de Gjövik, Norvège — *Nylund, C. G. e Paulsen, P.*

ASEA-Revue, 969, vol. 41, n.° 4, pág. 78-79.

Descrição do material didático, fornecido pela ASEA-Education AB.

C. D. U. 621.365.2

Modern design principles for arc furnaces for steelmaking — *Hanas, B.*

ASEA-Journal, 8-969, vol. 42, pág. 103-108.

Descrição da «ultra-alta-potência» (U. H. P.) dos fornos eléctricos por arco fornecidos por ASEA a Smedjebackens Valrverks AB, Sweden, com especial referência aos problemas associados com a coordenação das exigências de resistência mecânica e cálculo de circuitos eléctricos.

C. D. U. 621.77

Maquinado de Pérfiles

Ingenieria e Industria, 7/69, vol. 407, pág. 82 e seg.

Explica-se a solução adoptada por uma empresa de construção de motores, no fabrico de perfilados de alta precisão. Esta solução teve como característica dominante a adaptação dos tornos existentes, sem haver necessidade de especialização do mesmo pessoal.

A adaptação dos tornos foi feita adicionando um aparelho adicional que garante elevada precisão na substituição das ferramentas de corte.

C. D. U. 621.771.02: 621.785.3

Chauffage Electrique de produits à laminer — *Yngve Sundberg.*

Asea-Revue, vol. 41, n.° 5 pág. 109-12.

Descrição comparativa de três modos de aquecimento eléctrico de produtos a laminar: aquecimento indirecto por resistência, aquecimento por indução e aquecimento por condução.

Análise das diferentes técnicas e sua representação esquemática.

C. D. U. 621.833: 621.165.6

Réducteurs de Vitesse à Engrenages pour turbines Industrieles Brown Boveri — *Wahl Carl Gottfried.*

Rev. Brown-Boveri, 97, vol. 54, n.° 1, pág. 30 a 36.

O autor indica os factores que determinaram as características de uma série de redutores, especialmente construídos para serem utilizados com turbinas industriais de contra-pressão, e dá informações sobre a sua concepção.

C. D. U. 621.833.1 : 621.914.5 : 621.335

The Manufacture of Traction Gears

AEI Engineering, 1967, vol. 7, n.° 4 pág. 190 e seg.

Expõem-se as diversas fases de fabrico de rodas dentadas para locomotivas como seja o processo de talhe, feito por máquinas automáticas, o tratamento-térmico de superfície feito por indução dente por dente ou pelo processo clássico de aquecimento em atmosfera controlada, a rectificação dos dentes atendendo às condições de trabalho à flexão dos veios, e o controle de qualidade final.

C. D. U. 624.07[012.4]3.13

Planchers-Dalles. Étude Comparative des Diverses Méthodes de Calcul — *Emilian-Davidovici; W. A. Jaul.*

Annales, XII-69, n.° 264.

As lajes de pavimento, (estrutura plana sem vigas) assentando directamente sobre colunas, apresentam uma superfície inferior uniformemente plana que permite uma melhor utilização do espaço e uma simplificação na cofragem e nas armaduras do betão armado.

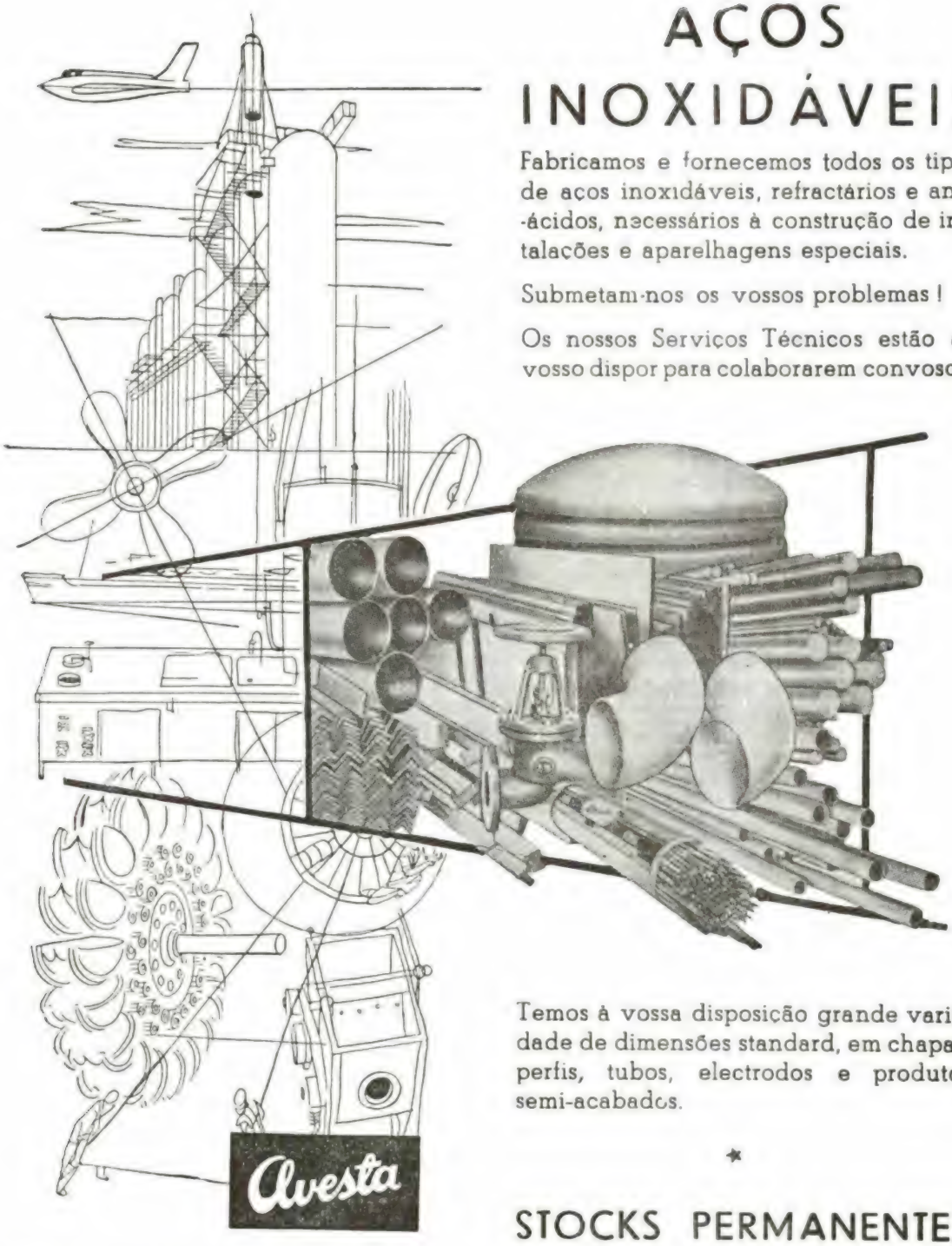
Assim, pareceu necessário fazer uma análise comparativa dos métodos de cálculo existentes — é esta análise que se apresenta. Estes métodos incluem os procedimentos ditos exactos, que derivam directamente da Resistência de Materiais e os metodos regulamentares fundados nos resultados experimentais. Manifestamente, todos estes métodos, aparentemente diferentes no que respeita à avaliação de momentos flectores, conduzem afinal a pesos de armaduras, sensivelmente idênticos (16 % de diferença); este facto é devido à diferença de regulamentos que consideram esforços admissíveis muito diferentes, para a mesma qualidade de aço.

AÇOS INOXIDÁVEIS

Fabricamos e fornecemos todos os tipos de aços inoxidáveis, refractários e anti-ácidos, necessários à construção de instalações e aparelhagens especiais.

Submetam-nos os vossos problemas!

Os nossos Serviços Técnicos estão ao vosso dispor para colaborarem convosco.



Temos à vossa disposição grande variedade de dimensões standard, em chapas, perfis, tubos, electrodos e produtos semi-acabados.

★

STOCKS PERMANENTES

AVESTA JERNVERKS AKTIEBOLAG
AVESTA — SUÉCIA

Representantes Exclusivos para Portugal e Ultramar:

A. JOHNSON & Co (PORTUGAL), L.DA

SEDE EM LISBOA:
Praça José Fontana, 11-1.º
Telef. 537015-537016-537017-537018

FILIAL NO PORTO:
R. Dr. António Granjo, 160/168
Telef. 54666

C. D. U. 624.07 [012.4] 4.2

Morfogénesis de uma lâmina — *Cassinello, Torroja, Moran, Fernandez.*

Informes de la Construcción, X-69, n.º 214.

Explica-se o projecto e a construção de uma estrutura em casca de betão armado; esta casca pode servir de cobertura de um espaço arquitectónico para a celebração de actos diversos e como monumento estrutural.

C. D. U. 624.012.45 : 624.024.4

Cubierta de Hormigon Armado — *Agustin Mazzeo.*

Informes de la Construcción, 18-9-69, n.º 213.

Descreve-se uma interessante execução de uma cobertura de secção quadrada, formada por quatro parabolóides hiperbólicos, unidos entre si, sem suportes intermediários e apoiados sobre colunas de forma particular, em função do trabalho a que estão submetidas. Tem uma espessura uniforme de seis centimetros e o betão foi aplicado no seu intradorso.

C. D. U. 624.012.45 : 624.046

Cálculo directo do coficiente de Mayoración — *Pindo Hernandez.*

Informes de la Construcción, X-69, n.º 214.

Obtêm-se fórmulas explícitas para o cálculo do coeficiente de majoração, em estruturas de betão armado, baseadas no princípio do custo generalizado mínimo; para as deduzir, obtêm-se primeiramente expressões analíticas aproximadas do custo da estrutura resistente e da probabilidade de assentamento, como função do coeficiente de segurança. Apresentam-se exemplos numéricos.

C. D. U. 625.855.3

Influência dos inertes num betão betuminoso — *Magalhães, J. M.*

Fomento (Lisboa), 7 (3): 201-211, 1969.

Este trabalho aprecia a influência de areia, da relação finos/grossos e da composição dos finos nas propriedades de um betão betuminoso, por meio de ensaios Marshall. Realizaram-se, para isso, sete composições granulométricas, de granulometria sensìvelmente constante, nas quais se fizeram variar as percentagens dos vários inertes utilizados. As conclusões encontradas foram as seguintes: *a*) O aumento da percentagem da areia conduziu a betões menos compactos e menos resistentes, mas também menos deformáveis; *b*) O aumento de finos de britagem (material passado no peneiro n.º 10 (ASTM) de 28 para 36 % conduziu a betões resistentes e menos deformáveis; *c*) Os betões mais resistentes e compactos apresentam-se, em regra, mais deformáveis.

C. D. U. 627.83 (469.3 31.22)

Aproveitamento hidroeléctrico de Fratel no Rio Tejo.

Electricidade, 11-12-69, n.º 62, pág. 434-435.

Descrição das características globais.

C. D. U. 628.16

Sistemas de eliminacion de lodos residuales urbanos — *Eduardo Dewisme.*

Revista de Obras Públicas, 10-69, n.º 3054.

Resumidamente, expõem-se as bases dos sistemas de eliminação dos lodos residuais que se formam nas instalações de depuração de água. Trata-se de uma verdadeira monografia sobre o tema. Apresentam-se numerosos dados e critérios de desenho, quer dos métodos clássicos, quer de processos que actualmente se vêm aplicando em vários países.

C. D. U. 681.3 : 629.12.057

Enregistrement de données sur les navires — *Thorsell. T.*

ASEA-Revue, 69, vol 41, n.º 4, pág. 80-84.

Descreve-se as funções fundamentais dum sistema de recolha de dados numéricos, citando outros artigos complementares.

Nem em toda a parte a espuma é tão útil

Frequentemente a espuma perturba o decurso da produção e impede o completo aproveitamento da capacidade. Contra isso os

Anti-Espumantes Silicone Wacker

são eficientes. Impedem a formação de espuma e combatem a espuma em meios quer aquosos quer não aquosos. Os Anti-Espumantes Silicone Wacker mostram mesmo em fortes diluições (até 1 : 1 milhão) resultados excelentes. Os Anti-Espumantes Silicone Wacker são aplicáveis por exemplo nas indústrias de óleos, papel, têxtil, na preparação de tintas e vernizes, em processos de fermentação e destilações a vácuo, em trabalhos com emulsões, sabões e detergentes, e outros mais.

WACKER

Escreva-nos por favor. Nós dar-lhes-emos informações complementares e poremos amostras à sua disposição.

WACKER-CHEMIE GMBH MÜNCHEN
Alemanha

Em Portugal:
Hoechst Portuguesa, Lda.
Avenida Sidónio Pais, 379 - Tel. 67051 - Porto
Avenida Duque d'Avila, 169-1° - Tel. 45141 - Lisboa

No Brasil:
Hoechst do Brasil Quimica e Farmacêutica S. A.
Rua Braulio Gomes, 36 - C. P. 6280 - São Paulo

S 5066

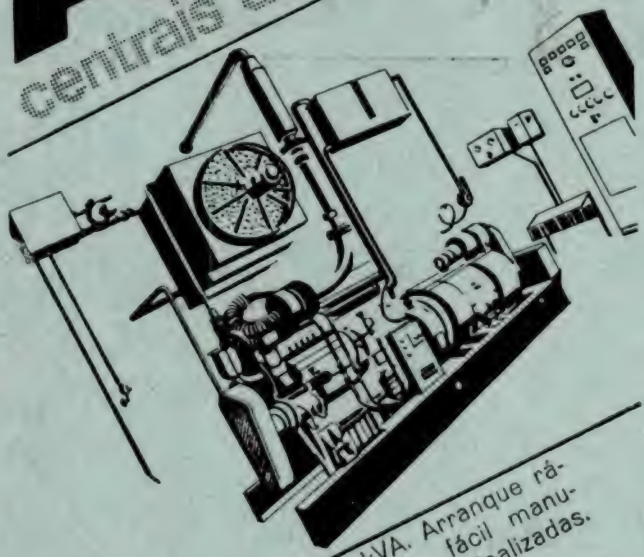
MARCA AE 7

Uma força criadora no domínio da electricidade

Grupos Electrogéneos

ASEA

centrais de emergência



Normalizados de 20 a 700 kVA. Arranque rápido e seguro, alto rendimento, fácil manutenção. Avarias automàticamente sinalizadas. Entregas rápidas, assistência garantida.

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Estraoa do Prior Velho
Tel. 2511101 (5 linhas)
SACAVÉM

R. do Campo Alegre, 144
Tel. 67239
PORTO

somague

barragens — portos — construção industrial

O PONTO CHAVE DA CONSTRUÇÃO

construção civil — túneis — pontes — estradas

SOMAGUE

SOCIEDADE DE EMPREITADAS
MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES S.A.R.L.
Rua Carlos Testa-1 LISBOA-1 telefone: PPC/A 562481

Ironite

ENDURECEDOR DE PAVIMENTOS

STUARTS GRANOLITHIC COMPANY, LTD.
ENGLAND

para GARES, DOCAS, GARAGENS, ACERO, PORTOS, etc e ainda para todos os pavimentos sujeitos a grandes atritos e cargas pesadas.

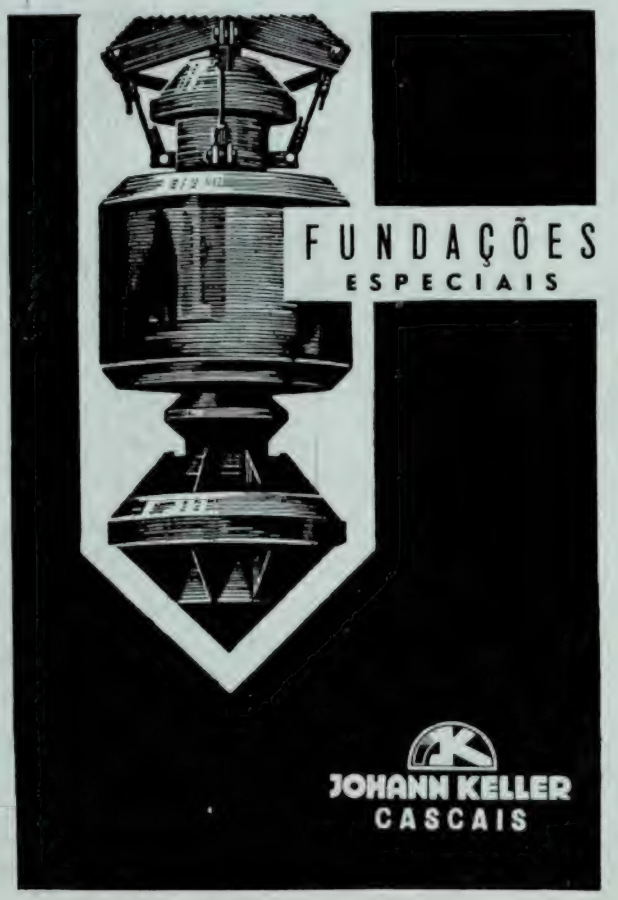
PEDIDOS AOS DISTRIBUIDORES GERAIS:

PILOTO & SANTOS, LDA.
Largo Dr. António de Sousa Macedo, 2
Telefone 67 88 67 LISBOA-2

ENVIAMOS AMOSTRAS, PREÇOS E INSTRUÇÕES TÉCNICAS

REPRESENTANTE EXCLUSIVO EM PORTUGAL:

Orlando Fernandes
RUA PALMIRA (aos Anjos) 46, A, B, C
Tels. 830 63 - 83 48 79
LISBOA-1



LISTA CLASSIFICADA DE ANÚNCIOS

Neste número continua a «Técnica» a sua secção de publicidade — a *lista classificada de anúncios* — destinada a facilitar a procura por parte dos clientes.

Estas páginas amarelas ficam abertas aos nossos leitores, que nelas podem anunciar a sua firma e endereço, ao preço de 50$00 por número. Quanto aos nossos anunciantes, é com muito gosto que lhes concedemos grátis a inscrição na lista.

CONSTRUÇÃO CIVIL

CONSTRUTORES CIVIS

— **Construções Técnicas, Lda.**
P. do Município, 13-3.º — Tel. 36 65 06

— **Fundações Frankl, Ltd.**
R. Braamcamp, 13-3.º — Lisboa — Tel. 53 41 12.

— **Soc. Const. Amadeu Gaudencio, Ld.ª**
R. Dr. Alexandre Braga, 4-A — Lisboa
Telef. 4 31 91 — 92 — 93.

— **Soc. de Pré-Fabricação e Obras Gerais Novobra**
Av. Estados Unidos da América, 100-5.º D
— Telef. 77 48 32 / 76 64 46 — Lisboa 5

— **SOMAGUE**
R. Carlos Testa, 1 — Tel. 56 24 81 — Lisboa 1

ESCAVADORAS E TRACTORES

— **Guedes & Almeida**
Rua Aurea, 181-2.º— Tel. 32 78 45 — Lisboa 2

FUNDAÇÕES

— **Construções Técnicas, Lda.**
Pr. do Município, 13-3.º — Tel. 36 65 06

— **Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ld.ª**
Av. da República, 42-8.º
— Telef. 77 70 86/7 e 77 12 65 — Lisboa

— **Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações**
R. S. Pedro de Alcantara, 1 — Tel. 32 46 93 e 21 32 56 — Lisboa — Luanda — Lourenço Marques — Beira.

— **Fundações Frankl, Lda.**
R. Braamcamp, 13-3.º — Lisboa — Tel. 53 41 12.

— **Johann Keller**
R. dos Bem Lembrados - Cascais — Tel. 28 01 46

— **Sondagens e Fundações, A. Cavaco, Lda.**
R. Rodrigo da Fonseca, 62-r/c — Lisboa 1
Tel. 56 11 71/72/73.

— **Sondagens Ródio**
Rua de S. Bento, 644-3.º — Lisboa
Tel. 68 80 96/7/8

— **Sopecate**
R. do Arsenal, 146, 2.º — Lisboa.
Tel. 3 40 10 - 32 02 08

IMPERMEABILIZAÇÃO

— **Empresa de Produtos Asfálticos**
R. Filipe Folque, 10-1.º — Lisboa — Tel. 73 01 56.

— **Orlando Fernandes**
R. Palmira, 46-A, B, C—Tel. 83 01 63, 84 26 39-Lx

INSTRUMENTOS DE PRECISÃO

— **Wild Portugal, Ld.ª**
Praça das Águas Livres, 8, s/l 6 — Lisboa 2 — Tel. 68 91 12.

ISOLAMENTO TÉRMICO E ACÚSTICO

— **Isola**
Av. António Augusto de Aguiar, 17
Telef. 53 71 91 — Lisboa

— **SETH, Ld.ª**
R. Filipe Folque, 10-1.º — Lisboa — Tel. 73 01 56

SONDAGENS

— **Construções Técnicas, Lda.**
Pr. do Município, 13-3.º — Tel. 36 65 06

— **Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ld.ª**
Avenida da República, 42-8.º
Telef. 77 70 86/7 e 77 12 65 — Lisboa

— **Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações**
R. S. Pedro de Alcântara, 1 — Tel. 32 46 93 e 21 13 56 — Lisboa — Luanda — Lourenço Marques — Beira.

— **Fundações Franki, Lda.**
R. Braamcamp, 13-3.º — Lisboa — Tel. 53 41 12

— **Johann Keller**
R. dos Bem Lembrados - Cascais — Tel. 28 01 46

— **Sondagens e Fundações, A. Cavaco, Lda.**
R. Rodrigo da Fonseca, 62-r/c — Lisboa 1
Tel. 56 11 71/72/73.

— **Sondagens Ródio, Ld.ª**
Rua de S. Bento, 664-3.º — Lisboa
Tel. 68 80 96/7/8.

— **Sopecate**
R. do Arsenal, 146-2.º — Lisboa.
Tel. 3 40 10 — 32 02 08

CONSTRUÇÕES METALO-MECANICAS

CONSTRUTORES METALO-MECANICOS

— **COMETNA**
R. Academia das Ciências, 5
Tel. 32 00 11 — Lisboa

— **Construções Metalo-mecânicas MAGUE Ld.ª** — Alverca

— **Mendes de Almeida, Lda.**
Av. 24 de Julho, 52-A-G — Telef. 66 67 10 — Lisboa

— **Sociedade Industrial Metalúrgica**
R. de S. Tiago, 1

EQUIPAMENTO ELECTRICO

— **ASEA**
Estrada do Prior Velho — Tel. 251 11 01
— Sacavém
R. do Campo Alegre, 144 — Porto — Tel. 62 106/9

— **Construções Elétricas Schréder, Ltd.**
Pr. José Fontana, 25-3.º E. — Tel. 56 10 01/2/3 — Lx.

— **Electrotécnicos Reunidos**
Avenida João XXI, 64 — Lisboa.

— **FRAPIL**
Cais de São Roque — Aveiro — Tel. 23071

— **J. F. de Azevedo e Silva & C.ª, Ld.ª**
Rua S. Francisco Sales, 2, 1.º — Tel. 65 41 65 — Lisboa.

— **Hidrel**
R. do Alecrim, 47-A-B
Tels. 32 57 00 - 3 59 66 — Lisboa

— **Jayme da Costa, Ld.ª**
R. dos Correeiros, 14 — Lisboa — Tel. 32 70 35
Praça da Batalha, 12 — Porto — Tel. 2 28 12.
Cx. Postal 5174 — Luanda — Tel. 47 43.

— **Siemens — Companhia de Electricidade**
Avenida Almirante Reis, 65
Telef. 53 69 21/0 — Lisboa

— **Soc. de Elec. Brown Boveri**
R. Sá da Bandeira, 481-2.º — Tel. 2 34 11 — Porto

— **SEPSA-Sociedade Construções Electro-Mecânicas**
Leça do Balio

— **União Eléctrica Portuguesa**
R. Alexandre Herculano, 244 — Porto.
R. Rosa Araújo, 35 — Lisboa.

DISTRIBUIÇAO DE ENERGIA

— **União Eléctrica Portuguesa**
R. Alexandre Herculano, 244 — Porto.
R. Rosa Araújo, 35 — Lisboa.

ELÉCTRODOS

— **Electro-Arco, Ld.ª**
R. Silva Carvalho. 220 — Lisboa — Tel. 68 36 46
R. do Bolhão, 216 — Porto — Tel. 2 12 77.

INSTALAÇOES

— **ASEA**
Estrada do Prior Velho — Tel. 251 11 01
— Sacavém
R. do Campo Alegre, 144 — Porto — Tel. 62 106/9

— **Construções Eléctricas Schréder, Ltd.**
Pr. José Fontana, 25-3.º E. — Tel. 56 10 01/2/3 — Lx.

— **Isolux, Lda.**
Largo do Campo Pequeno, 21, 4.º Esq.
Telef. 77 00 30/8/9 — Lisboa
Rua Dr. Alfredo Magalhães, 110, 2.º D.
Telef. 2 07 23 — Porto

— **J. F. de Azevedo e Silva & C.ª, Ld.ª**
Rua S. Francisco Sales, 2, 1.º — Tel. 65 41 65 — Lisboa.

— **J. Roma**
Praça da Figueira, 86/51/2/3 — Lx.

— **Jayme da Costa, Ld.ª**
R. dos Correeiros, 14 — Lisboa — Tel. 32 70 35.
Praça da Batalha, 12 — Porto — Tel. 2 28 12.
Cx. Postal 5174 — Luanda — Tel. 47 43.

— **Siemens — Companhia de Electricidade**
Avenida Almirante Reis, 65
Telef. 65 41 65 — Lisboa.

— **SEPSA - Sociedade Construções Electro-Mecânicas**
Leça do Balio

— **Standard Electrica**
Av. da Índia — Tel. 63 81 71 — Lx.

ISOLAMENTOS

— **Empresa Electro-Cerâmica, S.A.R.L.**
L. Barão de Quintela.

SOLDADURAS

— **Electro Arco**
R. Silva Carvalho, 239 — Lisboa
R. do Bolhão, 216 — Porto

— **J. Roma**
Praça da Figueira, 86/51/2/3 — Lx.

TELECOMUNICAÇOES

— **Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos, S.A.R.L.**
R. Rodrigo da Fonseca, 110, r/c — Lisboa — Tel. 68 60 72.
R. Sá da Bandeira, 766-1.° E — Porto — Tel. 2 48 18

— **Standard Electrica**
Av. Índia — Tel. 63 81 71 — Lx.

EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

— **COMETNA**
Rua Academia das Ciências, 5
Tel. 32 00 11 — Lisboa

— **Construções Metalo-Mecânicas Mague, Lda.**
Alverca do Ribatejo

— **DEMAG — Soc. Comercial Romar**
Trav. da Galé, 9 — Tel. 63 56 70 — Lisboa.
Santa Iria de Azoia

— **Frapil**
Cais de São Roque — Aveiro — Tel. 23071

— **Guedes & Almeida, Lda,**
R. Aurea, 181-2.° — Tel. 32 78 45 — Lisboa

— **Hidrel**
R. do Alecrim, 47-A-B
Tels. 32 57 00 - 3 59 66 — Lisboa

— **Mendes de Almeida, Lda.**
Av. 24 de Julho, 52-A-G — Tel. 66 67 10 — Lisboa

CORRENTES

— **Auto-Lusitana**
Av. da Liberdade, 73-79 — Lisboa

— **Harker Sumner**
L. do Corpo Santo, 18
Tel. 32 48 23 — Lisboa.

— **INA — Rolamentos de Agulhas**
Schaeffler, Lda — R. Sá da Bandeira, 740 — Porto.
Tel. 2115 7/8/9.

INDÚSTRIAS QUÍMICAS

— **Hoechst Portuguesa, Lda.**
Av. Sidónio Paes, 379 — Tel. 6 70 51 — Porto
Av. Duque de Avila, 169-1. — Tel. 4 51 41 — Lisboa

FELTROS

— **FANAFEL — Fábrica Nacional de Feltros Industriais**
Estrada de S. João — Ovar

TEXTEIS

— **FANAFEL — Fábrica Nacional de Feltros Industriais, Ld.ª**
Estrada de S. João — Ovar.

TINTAS

— **Mendes de Almeida, Lda.**
Av. de 24 de Julho, 52-A-G
Telef. 66 67 16 — Lisboa

LIVROS TÉCNICOS

— **TÉCNICA**
Avenida Rovisco Pais — Lisboa
Tel. 77 54 49

MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO

AÇOS ESPECIAIS

— **A. Johnson & C.ª (Portugal), Ld.ª**
P. José Fontana, 11-1.° — Lisboa — Tel. 53 70 15/6/7/8.
R. Dr. António Granjo, 160/168-Porto-Tel. 5 46 69

— **Companhia Portuguesa de Trefilaria**
R. do Instituto Industrial, 18-1.º, Dt.º — Lisboa
Tel. 67 12 24/5.

— **Heliaço**
R. S. Julião, 41-4.º — Tel. 36 78 17 — Lisboa.

— **PRISMA**
R. D. Luis I, 20 Lisboa Tel. 67 01 76

BETÃO

— **Companhia Portuguesa de Trefilaria**
R. do Instituto Industrial, 18-1.º, Dt.º — Lisboa
Tel. 67 12 24/5.
Lisboa 1

— **Empresa Cimentos de Leiria**
R. Braamcamp, 7 — Lisboa. — Tel. 5 91 61/66.

— **Heliaço**
R. S. Julião, 41-4.º — Tel. 36 78 17 — Lisboa.

— **PRISMA**
R. D. Luis I, 20 Lisboa. Tel. 67 01 76

— **Sociedade Portuguesa CAVAN**
R. de D. Estefânia, 94-A — Lisboa — Tel. 4 78 12 e 5 01 29.

CIMENTOS

— **AGUIAR E MELO, LDA.**
Praça do Município, 13-1.º — Tel. 32 11 51/2 Lx.

— **CIBRA — Cimentos Brancos**
Tv. do Corpo Santo, 15 — Lisboa — Tel. 32 04 64.
R. do Bonjardim, 205 — Porto — Tel. 2 57 79.

— **Empresa de Cimentos de Leiria**
R. Braamcamp, 7 — Lisboa — Tel. 5 91 61/66.

— **Orlando Fernandes**
R. Palmira, 46-A, B, C — Tel. 83 01 63/84 26 39-Lx.

— **Secil**
R. do Comércio, 156 — Lisboa 2 — Tel. 32 82 01/2/3

MATERIAIS PRÉ ESFORÇADOS

— **Soc. de Pré-fabricação e Obras Gerais Novobra, Ld.ª**
Av. E. U. da América, 100-5.º-E.
Tel. 77 48 32/ 76 64 46 — Lisboa.

ARTIGOS DE ESCRITÓRIO E ESCOLAR

MATERIAL DE DESENHO E TOPOGRÁFICO

— **Rotring**
Representante: Artur Westheimer, Lda.
Rua Maria aos Anjos, 48-r/c. — Lisboa 1

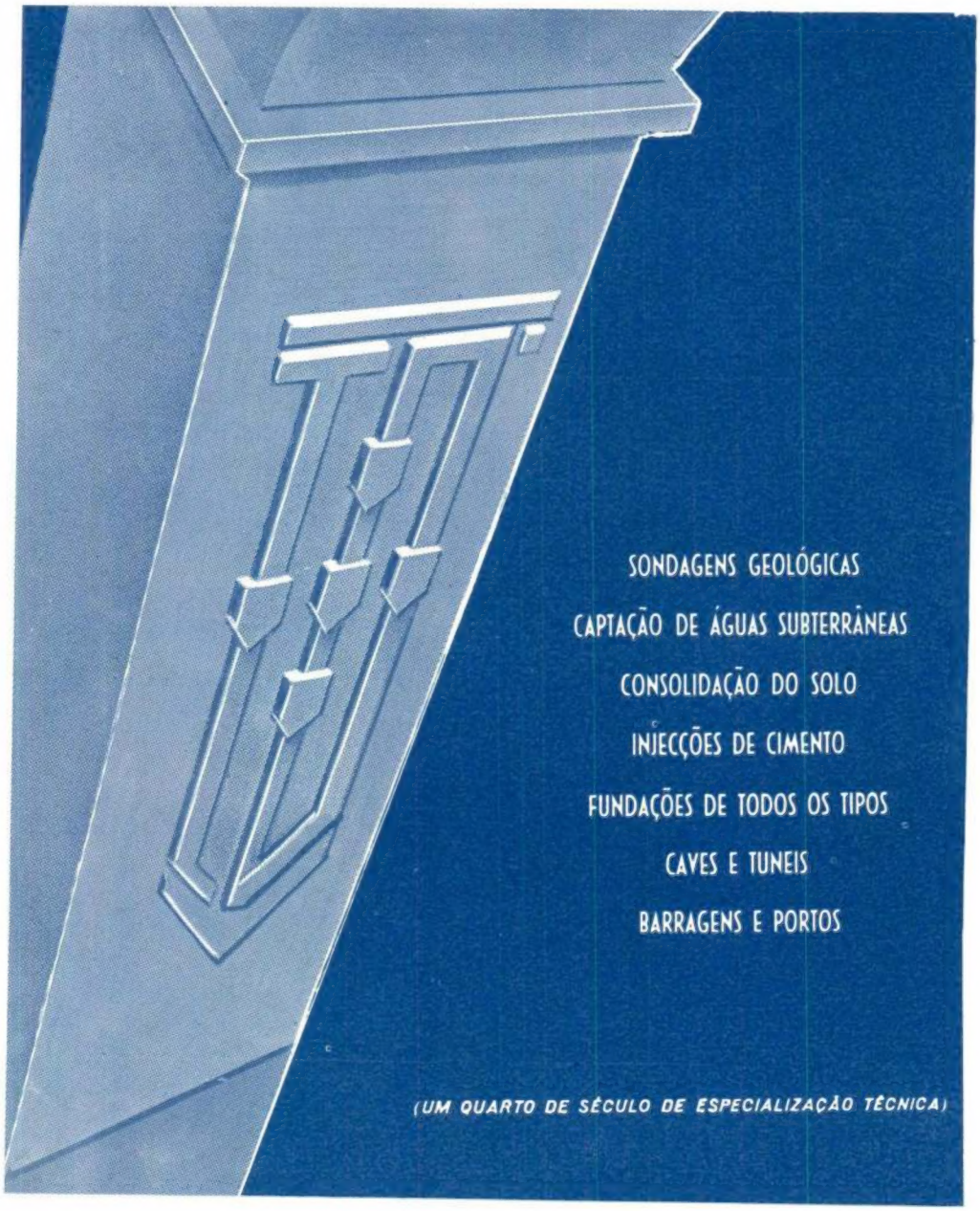
— **Wild Portugal**
Praça das Águas Livres, 8-s/l.
Tel. 98 91 12 — Lisboa.

Empresa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, L.DA

AV. DA REPÚBLICA, 42, 8.º
TELEFS. 77 70 86/7 e 77 12 65

LISBOA



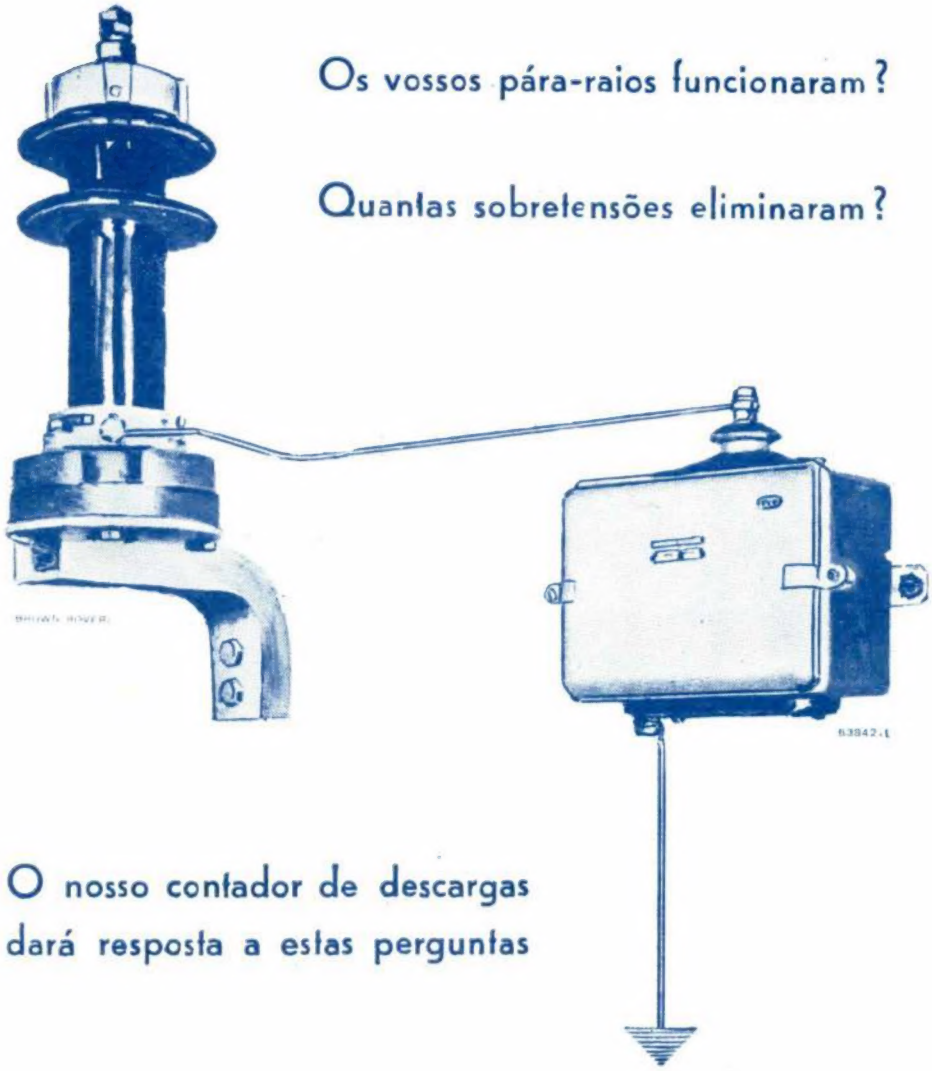
BROWN BOVERI

Pára-raios

Contadores de descargas

Os vossos pára-raios funcionaram?

Quantas sobretensões eliminaram?



O nosso contador de descargas dará resposta a estas perguntas

Para cada problema de protecção, os nossos Serviços Técnicos podem indicar a solução mais apropriada

SOC. DE ELECT. BROWN BOVERI, LDA.

RUA DE SÁ DA BANDEIRA – 481-2.º TEL. 23411-PORTO